JOSÉ BABINI

HISTORIA SUCINTA DE LA MATEMÁTICA

TERCERA EDICIÓN



COLECCIÓN AUSTRAL

ESPASA-CALPE, S. A.

HISTORIA SUCINTA DE LA MATEMÁTICA



COLECCIÓN AUSTRAL
N.º 1142


ESPASA
S A
C
CALPE

JOSÉ BABINI

HISTORIA SUCINTA DE LA MATEMÁTICA

TERCERA EDICIÓN

ESPASA-CALPE, S. A.
MADRID

Ediciones especialmente autorizadas por el autor para la

COLECCIÓN AUSTRAL

Primera edición: 18 - XII - 1952
Segunda edición: 22 - VI - 1953
Tercera edición: 14 - XI - 1969

Depósito legal: M. 22.874—1969

Printed in Spain

Acabado de imprimir el día 14 de noviembre de 1969

Talleres tipográficos de la Editorial Espasa-Calpe, S. A.
Ríos Rosas, 26. Madrid

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Páginas

EL PERÍODO CLÁSICO

INTERMEDIO

LA MATEMÁTICA RENACENTISTA

Páginas

LA MATEMÁTICA MODERNA

LA MATEMÁTICA ILUMINISTA

EL SIGLO XIX

INTRODUCCIÓN (*)

§ 1.—El contar

Se ha señalado con razón que la vida humana está como impregnada de matemática. En efecto, gran parte de los juicios de comparación que el hombre formula, así como ciertos gestos y actitudes de la vida diaria, aluden, consciente e inconscientemente, a juicios aritméticos y a propiedades geométricas; sin olvidar que el hombre, en especial el hombre contemporáneo, vive en permanente contacto con dos mundos saturados de matemática: la técnica y la economía.

Pero la actividad que mejor comprueba la densidad de la atmósfera matemática que rodea al hombre, es sin duda el contar, proceso que a la par de frecuente, se presenta en el hombre tan arraigado como el pensar y el hablar, y cuyo origen ha de verse, pues, en la lejana y confusa penumbra que envuelve al origen del hombre y de sus mitos.

(*) Este libro comprende un esbozo, breve y sin detalles técnicos, del desarrollo histórico de la matemática, desde la antigüedad hasta comienzos del siglo XX. Sigue en líneas generales nuestra *Historia de la matemática* (escrita en colaboración con Julio Rey Pastor y publicada por esta misma editorial, Buenos Aires, 1952), obra a la cual remitimos los lectores que desean complementar ese desarrollo y, en especial, conocer los fundamentos históricos y los caracteres de la matemática actual.

La etnografía, que al estudiar los pueblos primitivos actuales arroja, por comparación, alguna luz sobre el hombre prehistórico, no hace sino comprobar este hecho. Así, en el léxico de todos los pueblos primitivos se señala un conjunto de palabras, más o menos extensos, que puede considerarse como la forma rudimentaria de un sistema de numeración hablada.

Igualmente, aparece en los pueblos primitivos una gran variedad de procedimientos de cómputos que no se presentan, como entre nosotros, bajo la forma de una correspondencia de tipo cuantitativo entre el conjunto de objetos a contar y un conjunto, concreto o abstracto, de referencia; sino como relación cualitativa de un signo a la cosa significada, siempre bajo el imperio de la imagen concreta, pues el ejemplo abstracto no cabe en la mentalidad primitiva.

Por último, ciertos objetos materiales: hojas secas, piedrecillas, etc., pueden hacerse intervenir para facilitar los cómputos; objetos que, a su vez, pueden considerarse los precursores de los instrumentos primitivos de calcular: las cuerdecillas con nudos (de las que el ejemplo más conocido es el «quipo» peruano) y los ábacos de bolillas o botones, que se quiere hacer descender de aquéllas. Tales dispositivos adquirieron una difusión universal, en el tiempo y en el espacio. Se ha explicado este hecho considerando la cuerdecilla con nudos como una herencia de las civilizaciones agrícolas matriarcales, y admitiendo como centro de difusión la actual región de China, donde aún se encuentra en uso el ábaco.

§ 2.—Los sistemas de numeración

La historia, por su parte, comprueba la simultaneidad del hablar y del contar, pues con los primeros sistemas de escrituras conocidos: el de los antiguos sumerios y el de los egipcios, allá por el cuarto milenio antes

de Cristo, aparecen también los primeros sistemas escritos de numeración. Y precisamente, uno de los sistemas de numeración de los antiguos sumerios es el sistema sexagesimal que todavía hoy utilizamos en las medidas de los ángulos y del tiempo.

Una observación empírica es que todos los sistemas conocidos de numeración tienen por base el número 10 o un número relacionado con él: 5, 20, 60...; hecho cuya explicación, plausible, es que los dedos de las manos constituyen, en el contar y en el calcular, el recurso auxiliar más primitivo.

Con tales sistemas de numeración el hombre no sólo ha podido escribir los números enteros sino operar con ellos, por lo menos en el caso de las operaciones más simples.

Recursos de otra índole, muy variados, permitieron expresar y operar con las fracciones. En este sentido es característico el sistema de los egipcios que operaban exclusivamente con fracciones de numerador 1, hecho que les obligó a descomponer una fracción cualquiera en suma de fracciones de numerador unitario. Esta descomposición, que para nosotros hoy no deja de constituir una interesante cuestión aritmética, fue resuelta por los egipcios en forma empírica, y en uno de los documentos matemáticos más antiguos que se conocen: el papiro Rhind, de principios del segundo milenio antes de Cristo, aparecen descompuestas en suma de fracciones de numerador unitario las primeras 50 fracciones de numerador 2 y denominador impar.

En los sistemas de numeración, como en el contar, la inventiva humana se manifiesta a través de una gran variedad de formas y de procesos. Alrededor del perno constituido por la base igual a 10, se encuentran sistemas de base 5, como en la numeración romana; de base 60, como en el sistema de los antiguos sumerios; de base 20, como en la cronología maya. Igual variedad encontramos en la representación gráfica de los signos

numéricos: jeroglíficos, signos especiales, letras del alfabeto, etc., así como en los procedimientos de lectura: aditivo, sustractivo, multiplicativo, posicional.

§ 3.—MEDIDAS DE ÁREAS Y DE VOLÚMENES

Geometría, en griego, significa «medida de la tierra». En efecto, una antigua opinión, transmitida por HERODOTO, atribuye el origen de la geometría a la necesidad de medir, en el antiguo Egipto, las tierras de labranza, cuya extensión podía modificarse después de cada crecida del Nilo, con el objeto de fijar equitativamente el impuesto a pagar al rey.

Mas no sólo la medida de la tierra pudo haber sido el origen de los conocimientos geométricos, pues el hombre ha de construir también su vivienda y su tumba, sus graneros y sus canales; asimismo ha de edificar y decorar los templos y los altares en que adora a sus dioses y venera a sus antepasados; y, sobre todo, como ser singularmente atraído por las cosas del cielo, el hombre siente la necesidad de contemplar los astros, de medir y de prever sus movimientos, pues, según los astrólogos, en ellos anida el secreto de su nacimiento, de su destino y de su muerte.

Es probable que de todas esas actividades humanas haya surgido la necesidad de fijar los conocimientos geométricos que se encuentran en los documentos: papiros y tablillas cuneiformes, de las antiguas civilizaciones egipcia y de la antigua Mesopotamia.

Esos conocimientos comprenden el área de las figuras planas más simples, el volumen de algunos poliedros, la relación dada por el teorema de Pitágoras, por lo menos en el caso del triángulo sencillo de lados 3, 4, 5, caso conocido por todas las culturas antiguas; y algunas nociones relativas a la semejanza y a las figuras circulares. Entre estos últimos conocimientos se destaca el que

se refiere a la medida del círculo, problema que los antiguos resolvieron aproximadamente y que, bajo el nombre más técnico de «cuadratura del círculo» preocupó y apasionó a los matemáticos (y aún hoy a los que no lo son) hasta su solución lograda en 1882.

§ 4.—Los problemas aritméticos y algebraicos

Así como el contar y los sistemas de numeración contienen en germen las nociones fundamentales de la aritmética, y las medidas de áreas y de volúmenes representan los primeros rudimentos de una ciencia geométrica, los orígenes de la tercera rama elemental de la matemática: el álgebra, deben verse en esa colección de problemas, adivinanzas, recreaciones matemáticas, etcétera, que se encuentran en las colecciones o antologías de los pueblos antiguos. El origen folklórico de tales problemas puede comprobarse si se observa que algunos de ellos, en forma idéntica o muy semejante, se encuentran en épocas y lugares completamente alejados entre sí y sin aparente contacto científico, de ahí que esa semejanza sólo puede explicarse mediante la transmisión oral, a la manera de «semillas que lleva el viento», favorecida por el carácter recreativo, enigmático y a veces sorprendente del problema.

Es claro que los más antiguos documentos que contienen tales problemas son los papiros egipcios y las tablillas mesopotámicas. Mientras que en los primeros esos problemas poseen un carácter preferentemente aritmético, en las segundas, ellos aparecen envueltos en una atmósfera más abstracta, de tal índole que algunos historiadores de la matemática no vacilan en hablar de «álgebra babilonia».

Los problemas egipcios incluyen casos de proporcionalidad, de regla de tres, de repartición proporcional, así como problemas de progresiones aritméticas y geo-

métricas y algunos problemas algebraicos de primer grado. Se trata en todos los casos de problemas concretos de los que se da la solución correcta, aunque no siempre es fácil advertir cómo se llegó a ella. En cambio, en los textos babilonios últimamente descifrados, que en verdad pertenecen a la antigua civilización sumeria, se trata de problemas de primero y de segundo grado, y aunque son, en general, problemas geométricos, en ellos el acento incide más en las operaciones aritméticas que en la interpretación geométrica. Por supuesto que, lo mismo que en los problemas egipcios, se trata siempre de casos numéricos concretos, cuya solución se da mediante reglas sin explicación ni demostración alguna.

EL PERÍODO CLÁSICO

§ 5.—La cultura griega

Entre la época de los papiros egipcios (las tablillas cuneiformes son más antiguas aún) y la época a la que pertenecen las primeras noticias de un saber griego, transcurre más de un milenio, lapso en el cual el mar Egeo es teatro de acontecimientos en gran parte todavía desconocidos.

Es la época en que la antigua civilización egea de Creta, de Micenas, de Troya, se derrumba; es la época en que la introducción del hierro aporta una era de destrucción extraordinaria que torna dudosa la posibilidad de que alguna vez se conozca con cierta precisión la historia de este período, de cuyas brumas surgen, como primera manifestación de una nueva cultura, los poemas homéricos.

Las primeras manifestaciones del genio griego han despertado y aún despiertan cierto sentimiento de asombro, pues parecen surgidas de la nada, como obra de un milagro. Mas el actual desconocimiento, casi total, de lo ocurrido entre los siglos XVII y VII a. de C., nos obliga a ser cautelosos. Y aunque pueda ser aventurado, es muy posible afirmar que nuestra creencia en el llamado «milagro griego» no sea sino el fruto de aquel desconocimiento, pues es más plausible admitir que, durante aquella lejana y confusa época, los grie-

gos mantuvieran, ya directamente o ya por intermedio de los fenicios, contactos culturales con los pueblos de Egipto y de la Mesopotamia, adquiriendo sus conocimientos, que además pueden haber sido más avanzados de los que revelan los escasos documentos hasta hoy hallados y descifrados; que admitir un estancamiento definitivo en estos conocimientos en el estado en que hoy los conocemos y que por tanto el saber griego naciera así, casi de la nada, como por generación espontánea.

Pero cualquiera que sea el aporte oriental a la ciencia griega, sea aquel aporte entre legendario e informe que los mismos griegos reconocían, sea un aporte más sólido y concreto, como el que podrían denunciar futuras investigaciones arqueológicas, es indudable que la ciencia griega adquirió caracteres propios, muy distintos de los que revelan nuestros actuales conocimientos de las culturas egipcia y babilonia; caracteres propios que se ponen claramente de manifiesto sobre todo en la matemática griega.

Si adoptamos para esta ciencia los mismos períodos en que habitualmente se divide la historia de la cultura griega, podemos considerar:

1.° Un período *helénico*, que llega hasta la muerte de ALEJANDRO el Grande y de ARISTÓTELES, y cuya culminación es el siglo de Pericles. En ese período, sacudido por las guerras médicas y las guerras del Peloponeso, la matemática se desarrolla en conexión con las escuelas filosóficas, de las que toma algunos de sus fundamentos: permanentes unos, transitorios otros;

2.° Un período *helenístico* que llega hasta principios de la era cristiana y en el que la matemática cobra autonomía y logra sus mejores realizaciones: en un mundo en el cual la cultura griega se cristaliza en centros como Alejandría, Pérgamo, Rodas, y la dominación romana inicia su expansión, nacen las más grandes crea-

ciones de la matemática griega por obra de EUCLIDES, ARQUÍMEDES y APOLONIO, y

3.° Un período *greco-romano y de la decadencia* que comprende los primeros siglos de la era cristiana y en los que la matemática no encuentra sino epígonos y comentaristas. Con el fin de este período encuentra también su fin el mundo clásico y, de acuerdo a los cánones de la historiografía, se inicia la Alta Edad Media.

§ 6.—LA MATEMÁTICA DEL PERÍODO HELÉNICO

Mientras que hoy, a 30 ó 40 siglos de distancia, conservamos en los papiros egipcios y en las tablillas cuneiformes documentos originales de las contribuciones matemáticas de los antiguos pueblos orientales, nada de eso ocurre con las contribuciones griegas, a pesar de ser mucho más recientes, pues de las escasas producciones matemáticas sobrevividas hasta hoy, sólo disponemos copias y compilaciones tardías, a veces posteriores en varios siglos a los escritos originales, cuando no meras traducciones, especialmente árabes.

Esto es particularmente cierto para el período helénico, pues de los escritos anteriores a EUCLIDES sólo se conserva un fragmento escrito por el peripatético EUDEMO de Rodas, de la segunda mitad del siglo IV antes de C., que se refiere a la obra de HIPÓCRATES de Quío, matemático de la segunda mitad del siglo V antes de Cristo.

De ahí que la historia de la matemática de este período haya sido reconstruida sobre la base de fuentes indirectas, informaciones dispersas en autores de la época o posteriores, y especialmente de los escritos de los comentaristas del último período de la ciencia griega. De estos escritos cabe destacar un resumen histó-

rico que aparece en un libro de PROCLO, del siglo V, que en líneas generales señala el proceso seguido por la matemática griega durante este período.

§ 7.—LOS JONIOS

La matemática griega se inicia con el mismo nombre con que se inicia la filosofía griega: el de TALES de Mileto, uno de los «siete sabios», y primero también entre los miembros de la llamada escuela jónica.

TALES, como los demás miembros de esa escuela, fue un filósofo de la naturaleza, un «fisiólogo» que a través de observaciones empíricas sobre los seres, sobre las cosas y sobre los fenómenos, especialmente meteorológicos, llegó a una concepción de que todo el universo estaba sometido a un proceso y a una transformación continua, como si algo viviente lo habitase («todo está lleno de dioses»); proceso y transformación cuya causa y devenir ve en el agua («el agua es el principio de todas las cosas, pues todo proviene del agua y todo se reduce a ella»).

Dentro del campo estrictamente científico sus contribuciones son vagas e inciertas, atribuyéndose su fama a que predijo un eclipse de sol (que se ha supuesto ser el de 585 a. de C.). También son dudosas las noticias acerca de sus contribuciones a la matemática, en especial vinculadas con la geometría. Esas contribuciones se refieren a algunos teoremas geométricos y a un par de problemas prácticos, cuyo interés reside esencialmente en que en ellos se alude a propiedades generales de rectas, a igualdades de ángulos, a semejanza de figuras; es decir, a cuestiones totalmente distintas de los conocimientos geométricos egipcios y que, por tanto, muestran ya la nueva fisonomía que lleva el sello inconfundible de la geometría griega.

§ 8.—LOS PITAGÓRICOS

Si el aporte de los filósofos naturalistas de Mileto a la matemática no tiene hoy sino un valor histórico, muy distinto es el aporte a la matemática de los filósofos pitagóricos y eleatas, de las colonias griegas de Italia.

El pensamiento filosófico que, en íntima conexión con el problema cosmológico, había nacido en las colonias de Asia Menor, al trasladarse a las colonias italianas adquiere otro carácter, vinculándose ahora con los problemas metafísico y gnoseológico.

Primera en el tiempo y en importancia para la matemática, es la escuela pitagórica fundada en Crotona en la segunda mitad del siglo VI a. de C. y cuyo jefe se considera tradicionalmente PITÁGORAS, figura semilegendaria y semirreal, probablemente nativo de la isla de Samos. Se dice que estuvo en Egipto, más dudoso es que conociera a TALES y visitara Babilonia, y que regresado a su isla natal y en desacuerdo con el régimen político en ella imperante, se dirigiera a Italia, donde fundó en Crotona una escuela de carácter a la vez místico y político, científico y religioso. Esa escuela, especie de hermandad y de secta secreta, se dedicó a estudios filosóficos y científicos, pero también intervino en las luchas políticas que en definitiva trajeron su destrucción y posiblemente la de su jefe a principios del siglo V.

El secreto y el misterio con que se rodeaban los dogmas y las enseñanzas de la escuela, así como el carácter exclusivamente verbal de éstos y la obligación de atribuir todos los descubrimientos al jefe de la escuela, tornan difícil averiguar en qué consisten efectivamente las contribuciones de PITÁGORAS, o mejor de los pitagóricos, a la matemática. En verdad el secreto acerca de los estudios científicos y filosóficos de la escuela pitagórica no se mantuvo rigurosamente, pues su influencia

se hizo sentir antes de que FILOLAO los hiciera conocer en el siglo IV. Puede haber contribuido a su divulgación algunas delaciones, aunque es más probable que ella fuera una consecuencia de las luchas políticas en cuyo seno la escuela encontró su disolución.

Frente al pensamiento de los jonios, el pitagorismo presenta una nota característica y original en la naturaleza especial del elemento primordial que trae a primer plano como principio de todas las cosas, principio que es ahora el *número*, o quizá mejor, la omnipotencia y omnipresencia del número en todas las cosas. Así nos dice FILOLAO: «Todo lo que se conoce tiene un número, sin el cual nada puede comprenderse o conocerse»; principio que, algo más prudente, ARISTÓTELES precisa: «Los llamados pitagóricos, que empezaron a ocuparse de investigaciones matemáticas en las que progresaron grandemente, fueron conducidos por estos estudios a admitir como principio de todas las cosas existentes, aquellos en que se fundan las ciencias matemáticas. Y como en estas ciencias los primeros principios que se encuentran son, por esencia, los números, creyeron encontrar en éstos más analogías con lo que existe u ocurre en el mundo, que las que pueden encontrarse con la tierra, el aire y el fuego... Habiendo comprobado luego que las propiedades y las relaciones de las armonías musicales corresponden a razones numéricas y que también en otros fenómenos naturales se encuentran correspondencias semejantes con los números, se convencieron aún más que los números constituyen los elementos de todas las cosas y que en los cielos hay proporción y armonía.»

Tentado se estaría en ver en esta doctrina la lejana precursora de la concepción actual que busca y encuentra relaciones cuantitativas en los fenómenos naturales, pero en verdad su significado es más limitado. El número que los pitagóricos conciben como un elemento subyacente en toda la realidad material, no es nuestro ente

ideal y abstracto, sino un elemento natural constitutivo de todos los cuerpos, imaginados por ellos como formados por «puntos materiales» o «mónadas» cuya distribución y orden caracterizan a cada cuerpo. Los términos geométricos: *cuadrado* y *cubo*, con que aún hoy designamos a ciertos números, así como numerosas denominaciones: números triangulares, cuadrangulares, piramidales, etc., que se encuentran en la geometría griega, hablan a las claras de esta naturaleza corporal de los números.

A la sombra de tal concepción metafísica y al lado de una mística de los números, nace la matemática como ciencia. Es entonces cuando se la bautiza (*matemática*, de acuerdo con la acepción más difundida significa «ciencia por excelencia»; *matemáticos* eran los miembros «científicos» de la secta pitagórica) y se establece su primera división en ramas. La matemática estudiaba o bien *los cuántos*, o bien *el cuánto*. Los cuántos, es decir, la cantidad discreta, podía a su vez estudiarse en sí *(aritmética)* y en relación con otra *(música)*; mientras que, por su parte, el cuánto, es decir la cantidad continua podía estudiarse fija *(geometría)* o móvil *(astronomía)*, llegándose así a la clasificación del saber en el clásico *quadrivium* latino, que perduró en la enseñanza durante dos milenios.

De esos cuatro campos del saber, los pitagóricos se ocuparon especialmente de aritmética y de geometría: propiedades elementales de los números, de algunas sucesiones sencillas y de las proporciones en aritmética; propiedades de polígonos y poliedros, en especial comparación de figuras planas, en geometría. Entre estas últimas cabe destacar el célebre teorema llamado de Pitágoras, que expresa la conocida relación entre los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Aunque no es fácil asegurar con qué método y con qué grado de generalidad demostraron el teorema, es

indudable que esa demostración constituyó un magno triunfo de la escuela, aunque luego, como boomerang, se volvió en contra de ella. Fue en efecto, a través de un simple caso particular del teorema de Pitágoras que se puso de manifiesto la existencia de los *irracionales*, es decir, de cosas que no podían expresarse mediante números (enteros y fraccionarios), y que por tanto no cabían en la concepción pitagórica. Este hecho, unido a la crítica de los eleatas, contribuyó a asestar un golpe de muerte a la doctrina.

§ 9.—Los eleatas

En la primera mitad del siglo V floreció en las colonias italianas otra escuela filosófica, cuyo centro fue la ciudad de Elea, fundada por emigrados griegos que huían de la invasión persa. Fue uno de sus fundadores Jenófanes, poeta y filósofo, espíritu sarcástico y crítico que influyó sin duda en la tendencia de la escuela filosófica de Elea que se caracteriza por la introducción del sentido crítico, no sólo en contra de las doctrinas anteriores, sino como principio sistemático de elaboración científica. El fundador de la escuela fue Parménides de Elea, con quien se presenta un nuevo protagonista en el pensamiento reflexivo: el juego de la razón con el proceso dialéctico del pensar, surgiendo, como primer producto de ese proceso, la distinción entre la apariencia y la esencia de las cosas. Según Parménides, frente a la realidad sensible que percibimos, cambiante y efímera, existe la realidad eterna, inmutable e inmóvil del ser. La ciencia ha de buscar esta realidad oculta detrás de las apariencias del mundo de los sentidos y distinguir la verdad (el *ser*) de la opinión (el *no ser*). Sin duda que en su poema *Sobre la naturaleza*, escrito en tono profético y alegórico, Parménides no indica el camino para llegar a la verdad, pero no es menos induda-

ble que con los eleatas se inicia la crítica del conocimiento y se introduce en la construcción científica un rigor lógico que, más allá del empirismo de los jonios y del misticismo de los pitagóricos busca y trata de encontrar en el poder racional del hombre el carácter de permanencia que otorga al conocimiento su esencia, su objetividad.

La eficacia con que ese poder puede esgrimirse se comprueba en su discípulo ZENÓN de Elea, autor de los clásicos argumentos en contra de la pluralidad y del movimiento, que durante mucho tiempo fueron considerados como paradojas, pero que hoy son interpretados como críticas dirigidas a demostrar lo absurdo de las concepciones pitagóricas que hacían de los cuerpos suma de puntos, del tiempo suma de instantes, y del movimiento suma de pasajes de un punto a otro.

Además de los aportes de orden lógico y metodológico que la escuela de Elea significó para la matemática, esa escuela, en especial a través de los argumentos de ZENÓN, puso en evidencia el peligro que para esa ciencia entrañaba el manejo de la pluralidad infinita, de ahí que es probable que uno de los resultados de la crítica eleata fuera esa característica de los matemáticos griegos posteriores que, a veces mediante hábiles recursos técnicos, eliminaron o reprimieron el infinito de la matemática.

§ 10.—La Academia y el Liceo

A mediados del siglo V a. de C., Atenas se convierte en el centro cultural y político del mundo griego. Como fruto de madurez intelectual, y en conexión con acontecimientos políticos y sociales, se produce a fines de siglo un característico movimiento cultural: la «época de los sofistas», en el que sobresale con rasgos originales la figura de SÓCRATES, cuya prédica se perpetúa a

través de su discípulo PLATÓN. Éste funda, ya en el siglo IV, la Academia de la cual se desprenderá ARISTÓTELES, quien a su vez funda el Liceo, constituyéndose así los dos grandes centros de la filosofía griega que influyeron decididamente en todo el pensamiento griego, y por tanto también en la matemática.

La influencia de PLATÓN y de la Academia sobre la matemática es singularmente importante, en virtud del elevado concepto que la escuela platónica tenía de esa ciencia y del papel que ella desempeña, tanto en la armonía del universo como en la formación humana.

Numerosas son las consideraciones de orden matemático que aparecen en los *Diálogos* de PLATÓN. Por lo demás su cosmología, de un pitagorismo acentuado, se funda sobre las proporciones, los polígonos y los poliedros regulares, sólidos estos últimos que durante mucho tiempo se llamaron «cuerpos platónicos». Se atribuyen a PLATÓN aportes metodológicos a la matemática y hasta algún aporte técnico; contribuyendo su prédica al progreso de los conocimientos matemáticos, en especial en campos nuevos, como en el de los irracionales, o en campos poco trillados, como en el de la geometría sólida. Por último, es indudable que el idealismo platónico contribuyó a destacar el carácter ideal de los objetos y verdades matemáticas.

Numerosos son los nombres de geómetras vinculados, directa o indirectamente, con la escuela de PLATÓN. De algunos de ellos se tienen escasas o, a veces, ninguna noticia, pero de otros se conocen algunas de sus contribuciones matemáticas. Entre estos últimos se destacan EUDOXO de Cnido, de la primera mitad del siglo IV antes de C., el máximo matemático del período helénico, a quien se atribuye una teoría general de las proporciones, independiente de la circunstancia de ser las cantidades conmensurables o no; un método de demostración, hoy denominado «método de exhaución», que sustituye con igual rigor las actuales demostraciones en

las que se hace uso del concepto infinitesimal de *límite;* y en conexión con ambas cuestiones un importante enunciado relativo a la teoría de las magnitudes, hoy denominado «postulado de Arquímedes» y a veces «postulado de Eudoxo-Arquímedes».

En cambio, ni ARISTÓTELES ni su escuela parecen haberse ocupado especialmente de matemática, probablemente debido a que esta ciencia en su época estaba lo suficientemente constituida como para no merecer su atención, que se dirigió principalmente a los restantes sectores del saber científico, algunos conexos con la matemática, como la mecánica y la astronomía, que no habían alcanzado aún ese estado de perfección. Con todo, ARISTÓTELES con sus investigaciones lógicas, fijó las bases sobre las cuales se ordena y se edifica una ciencia deductiva, tal cual es la matemática; sin olvidar que a través de la tarea encomendada a su discípulo EUDEMO de Rodas, se redactó la primera «historia de la matemática», algunos fragmentos de la cual llegaron hasta nosotros.

§ 11.—LOS TRES PROBLEMAS CLÁSICOS

La matemática griega, alimentada y fundamentada por las concepciones filosóficas de las escuelas a cuya sombra nació, debió gran parte de su crecimiento y desarrollo a ciertos problemas concretos que sirvieron de centros de atracción y de estímulo para los investigadores, polarizando muchos de los conocimientos matemáticos de los griegos. En este sentido fueron interpretados el teorema de Pitágoras y la construcción de los poliedros regulares, pero el hecho se torna evidente si se consideran tres problemas muy especiales, que en gran medida contribuyeron al desarrollo de la matemática del período helénico; ellos son: la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo.

El problema de la duplicación del cubo o «problema de Delos», del nombre de la isla, sede de una de las leyendas que dio origen al problema, consiste geométricamente en determinar el lado de un cubo de volumen doble del de un cubo de lado dado.

El problema de la trisección del ángulo, es decir: dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales, ha de haber nacido naturalmente, y si llamó la atención fue seguramente por la desconcertante discrepancia entre la sencillez de sus términos y la imposibilidad de resolverlo con los recursos comunes de la geometría, imposibilidad tanto más llamativa cuanto que con esos recursos podía dividirse un ángulo cualquiera en 2, 4, 8... partes y que también podían trisecarse algunos ángulos especiales, como el recto, el llano, etc.

En cuanto al problema de la cuadratura del círculo, nacido seguramente de la necesidad práctica de calcular el área del círculo, consiste geométricamente en determinar el lado de un cuadrado equivalente a un círculo de radio dado.

Un primer rasgo común de estos tres problemas es que no encuadraban dentro de la geometría de polígonos y poliedros, de segmentos, círculos y cuerpos redondos que lentamente se iba elaborando, y que su solución sólo podía obtenerse utilizando otras figuras u otros recursos que iban más allá de las construcciones fundadas sobre las intersecciones de rectas y circunferencias o, como se dijo posteriormente, construcciones exclusivamente con regla y compás. En segundo lugar, y esto ha de haber llamado la atención a los geómetras griegos, algunos de los métodos que resolvían uno de los problemas resolvía también otro de ellos, hecho que revelaba una relación entre esos problemas que escapaba, y escapó, a los matemáticos griegos.

Entre los investigadores que se ocuparon de esos problemas recordemos a HIPÓCRATES de Quío, del siglo V

antes de C., que puede considerarse como el primer matemático «profesional» y que se ocupó del problema de la duplicación del cubo convirtiéndolo en un problema de geometría plana; y del problema de la cuadratura del círculo, con el cual se vinculan sus célebres «lúnulas» cuadrables, es decir, ciertas figuras mixtilíneas equivalentes a figuras poligonales que podían construirse con regla y compás,

Si HIPÓCRATES redujo el problema de la duplicación del cubo a un problema plano, ARQUITAS de Tarento lo recondujo al espacio, dando del problema una extraordinaria solución mediante la intersección de tres superficies.

El problema de la cuadratura del círculo, encarado por HIPÓCRATES de Quío a través de la búsqueda de figuras circulares cuadrables, fue enfocado por algunos sofistas contemporáneos: ANTIFÓN, BRISON, desde otro punto de vista (polígonos inscritos y circunscritos a la circunferencia) que, infructuoso entonces, resultó fértil más adelante.

A otro sofista: HIPIAS de Elis, de fines del siglo V, se debe una curva que le permitió resolver el problema de la trisección del ángulo y que más tarde se denominó *cuadratriz*, pues por obra de DINOSTRATO, matemático del siglo IV a. de C., se demostró que con esa curva podía rectificarse la circunferencia, vale decir, resolver un problema equivalente al de la cuadratura del círculo.

Por último, cabe citar a MENECMO, también del siglo IV, a quien se atribuye el descubrimiento de las cónicas, que son las curvas más simples después de la circunferencia y que deben su nombre genérico al hecho de obtenerse como secciones cónicas, vale decir, secciones de un cono circular. Debido a su origen las tres cónicas que pueden obtenerse se denominaron «sección del cono acutángulo, sección del cono rectángulo y sección del cono obtusángulo», aunque desde APOLONIO adopta-

ron el nombre actual de elipse, parábola e hipérbola, respectivamente.

No sólo MENECMO habría descubierto las cónicas, sino que habría estudiado una serie de propiedades de las mismas, por lo menos las suficientes como para dar una sencilla solución del problema de Delos mediante la intersección de dos de esas curvas.

§ 12.—LA EDAD DE ORO DE LA MATEMÁTICA GRIEGA

Al iniciarse el siglo III a. de C. las condiciones políticas y culturales del mundo mediterráneo han cambiado radicalmente. En la península italiana un pequeño pueblo, ya convertido en la mayor potencia de Italia, había iniciado una expansión que lo convertiría en un gran imperio, mientras que en el mundo griego las expediciones, conquistas y muerte de ALEJANDRO modificaban completamente su fisonomía.

Si bien el incipiente imperio que fundara ALEJANDRO desapareció con él, la idea de imperio universal que él encarnara y que había tratado de realizar arraigó en el campo de la cultura, pues la cultura griega, a favor de un rápido derrumbe del imperio persa, se extendió fácilmente por todo el Oriente, helenizándolo.

Por otra parte, las campañas de ALEJANDRO, a la par que ampliaron el horizonte geográfico de los griegos, dilataron extraordinariamente sus conocimientos. Un fecundo intercambio se establece entre Oriente y Occidente, mientras que los centros intelectuales se extienden y se desplazan. Ya Atenas había perdido su predominio político, ahora pierde su supremacía cultural y en el mundo griego de Oriente surgen nuevos focos de irradiación de la cultura griega, entre los que sobresale Alejandría, gran emporio del comercio mediterráneo, fundada en 332, que a fines del siglo III ya cuenta con medio millón de habitantes.

Al universalizarse, el idioma griego contribuyó al intercambio y a la difusión de la cultura, sirviendo de vehículo a todos los intelectuales del mundo helenizado y favoreciendo al progreso de la ciencia, a la sazón en una etapa de franca especialización y diversificación. Esta etapa, cuyos comienzos pueden verse en en el siglo V, cobra impulso en el siglo IV caracterizando a este período helenístico, en el cual se multiplican las escuelas médicas y filosóficas, y las diferentes ciencias: matemática, astronomía, geografía, mecánica, cobran independencia y personalidad.

Por otra parte, los príncipes de los estados helenísticos dispensaron una amplia protección a las artes y a las ciencias. Tal protección fue singularmente importante en el caso de las ciencias, pues permitió no sólo ofrecer a los hombres de ciencia las condiciones de seguridad y de bienestar que facilitaran su dedicación exclusiva a la investigación y a la enseñanza, sino que permitió la adquisición de materiales e instrumental necesarios para la tarea científica. Modelo de esta corte de mecenas fue la de los Ptolomeos de Egipto, que convirtieron al gran puerto comercial de Alejandría en el centro científico más importante, y también el más duradero, del mundo griego.

En Alejandría se construyen la Biblioteca y el Museo, donde centenares de sabios y estudiosos enseñan, trabajan, investigan; se levantan observatorios para estudiar los fenómenos celestes; se erigen establecimientos especiales en los que se concentran los enfermos que ofrecen así a los médicos un rico campo de observación y de estudio, etc. Con este ambiente científico de Alejandría se vinculan directa o indirectamente las tres figuras máximas de la matemática antigua: EUCLIDES, ARQUÍMEDES y APOLONIO, cuyo brillo por sí solo justifica que a este período se lo califique de «edad de oro» de la matemática griega.

§ 13.—EUCLIDES Y LOS «ELEMENTOS»

Casi nada se sabe de EUCLIDES, fuera de las noticias que menciona PROCLO en su resumen histórico, según el cual EUCLIDES fue un sabio alejandrino que floreció hacia el 300 a. de C., que publicó numerosas obras científicas, destacándose entre ellas los célebres *Elementos,* cuya importancia científica y didáctica se pone en evidencia ante el hecho de que hasta hace pocos años eran aún utilizados como texto escolar. Por lo demás, ese tratado fue siempre considerado como sinónimo de geometría, y su extraordinaria difusión le permite rivalizar con las obras cumbres de la literatura universal: la *Biblia,* la *Divina Comedia,* el *Quijote...*

Los *Elementos* no contiene toda la geometría griega, ni es un resumen de toda ella; sin duda contiene una gran parte de la matemática que los griegos anteriores a EUCLIDES y el propio EUCLIDES elaboraron, pero esa parte no fue tomada al azar, sino seleccionada de acuerdo a un criterio prefijado que convierte a ese conjunto de conocimientos en un *sistema.* Esta tendencia al sistema es tan vigorosa en EUCLIDES, y tan rígido es su resultado, que no sólo no se conocen *Elementos* posteriores a los de EUCLIDES, sino que éstos han servido de modelo a un tipo de construcción científica, de método científico, que usado desde entonces en la matemática, se extendió y se extiende actualmente a otros sectores científicos.

Por supuesto que los *Elementos,* ni por su contenido ni por su orientación, son fruto exclusivo de EUCLIDES; su contenido proviene en gran parte de los pitagóricos y de EUDOXO, y en su orientación han influido especialmente PLATÓN y ARISTÓTELES. Del platonismo, del cual era adepto, EUCLIDES tomó la independencia de la ciencia de toda finalidad práctica y por tanto la abstracción y la primacía del conocer sobre el hacer; de ARISTÓTE-

LES tomó el riguroso método deductivo, la separación entre principios y teoremas, y la distinción de los principios en definiciones y axiomas.

El método euclideo, que actualmente se prefiere denominar método axiomático, consiste en denunciar previamente los supuestos e hipótesis básicos sobre los que se construirá la ciencia, y edificar luego ésta en forma rigurosamente deductiva. Este método es de difícil realización, tanto por la elección de las hipótesis básicas como por el desarrollo deductivo, de ahí que la crítica moderna haya denunciado que en los *Elementos* el método axiomático no aparece revestido de todas las precauciones necesarias, ni cumple con todas las exigencias que le impone la lógica; circunstancias que evidentemente no disminuyen el mérito de EUCLIDES de haber aplicado por primera vez, hace 23 siglos, un método fecundo para la ciencia, en una construcción geométrica cuyas líneas generales pasamos a reseñar.

Los *Elementos* comprenden 13 libros, la mayoría de los cuales se abre con una serie de definiciones (el vocablo utilizado por EUCLIDES es más bien «términos»), a las que en el libro I se agregan los axiomas, que EUCLIDES distribuye en dos grupos: postulados y nociones comunes.

Las definiciones de EUCLIDES no han de entenderse en un sentido lógico estricto. Son más bien simples menciones o descripciones sumarias de los objetos de lo que luego se ocupará la ciencia geométrica y hasta algunas de ellas sólo tienen sentido en vista del desarrollo histórico anterior a EUCLIDES. De manera que esas definiciones no deben ser tomadas ni como enunciados básicos ni como juicios de existencia; tal función la desempeñan en los *Elementos* los axiomas, vale decir: los postulados y las nociones comunes. Los postulados, que en la versión más segura son cinco, constituyen los fundamentos específicamente geométricos, y han sido elegidos de tal manera que su función consiste

esencialmente en fijar la existencia, de modo único, de los entes fundamentales: punto, recta y circunferencia, con los que se construirán las figuras geométricas. En efecto, tres de esos postulados aseguran la existencia y unicidad de la recta, es decir, de un segmento prolongado indefinidamente cuando se dan dos de sus puntos; un cuarto postulado fija esa existencia para una circunferencia de centro y radio dados; mientras que un quinto postulado establece las condiciones para que dos rectas determinen un punto. (Las condiciones respectivas para que dos circunferencias o una circunferencia y una recta tengan puntos comunes no han sido postuladas por EUCLIDES.)

Así como los postulados fijan, o pretenden fijar, la existencia de las rectas, circunferencias y sus posibles intersecciones, y por tanto se refieren a entes exclusiva y específicamente geométricos, las nociones comunes fijan, o pretenden fijar, las operaciones entre «cosas», es decir, entre magnitudes, sean geométricas o no.

Los primeros cuatro libros de los *Elementos* comprenden las proposiciones más importantes de geometría plana elemental referentes a triángulos, paralelogramos, equivalencias, teorema de Pitágoras (con el que se cierra el libro I), circunferencias e inscripción y circunscripción de polígonos regulares: todo esto, claro es, dentro de los medios admitidos por los postulados.

Los dos libros siguientes, V y VI, se refieren a la proporcionalidad, tratando el V la teoría general de las proporciones atribuida a EUDOXO, y el VI la aplicación de esa teoría a las magnitudes geométricas.

Los tres libros siguientes, VII, VIII y IX, se refieren a la aritmética o, más exactamente, a la teoría de los números, pues en ellos sólo se trata de números enteros positivos. La aparente vinculación con la geometría reside en el hecho que en todas las proposiciones, los números están representados por segmentos. En ellos se trata de la teoría elemental de la divisibilidad, de la des-

composición en factores primos, de las proporciones y progresiones geométricas, cerrándose el libro IX con una hermosa proposición de sabor pitagórico, en la que EUCLIDES da la expresión de los números perfectos (iguales a la suma de sus divisores menores que él) pares.

El libro X de los *Elementos*, el más extenso y el más difícil de todos, trata de los irracionales, y en él se clasifica, mas no se calcula, una serie de combinaciones de expresiones racionales e irracionales, de la índole que se presentaría en nuestra álgebra con raíces cuadradas.

Los tres últimos libros, dedicados a la geometría del espacio, son de factura inferior a los anteriores. El XI estudia algunas propiedades generales de las rectas y planos; el XII, que trata de cuestiones planas y del espacio, incluye los teoremas para cuya demostración se hace uso del método de exhaución; y el XIII, que comprende también una serie de propiedades de geometría plana y del espacio, tiene por finalidad la construcción y comparación de los cinco poliedros regulares inscritos en una esfera. Y con la demostración que no pueden existir otros poliedros regulares, además de los cinco conocidos, se cierran los *Elementos* de EUCLIDES.

Tal es, a grandes rasgos, el contenido de la obra más importante de EUCLIDES. Por grande que haya sido el aporte de los matemáticos anteriores, queda siempre para EUCLIDES el mérito de haber aplicado, por primera vez, un método que resultó fecundo para la matemática y para la ciencia en general, y el de haber estructurado sistemáticamente, con ese método, en forma orgánica y ordenada, una gran cantidad de conocimientos matemáticos, en especial de geometría plana. Además, en los *Elementos*, EUCLIDES acentúa una nota característica y permanente de la matemática: su carácter abstracto y su absoluta independencia de toda aplicación práctica o concreta. En los *Elementos* no figura ni una aplicación concreta, ni un ejemplo numérico, ni se alude a instru-

mento geométrico alguno. Todo su interés y su finalidad residen en el conocimiento mismo.

Pero en matemática conocer es demostrar, y los *Elementos* nos ofrecen el primer ejemplo, en gran escala, de ese fecundo juego de la razón que se da en las demostraciones matemáticas, creador de nuevos conocimientos que se presentan atraídos por la irresistible fuerza del raciocinio y cuya única finalidad es el conocimiento mismo. Sin duda que para nuestros gustos actuales, las demostraciones de EUCLIDES son áridas, encuadradas en moldes formales demasiado uniformes y rígidos, algo pedantes; pero con todo es innegable que en el orden lógico, en los recursos deductivos y en los métodos de demostración, ha de verse otro de los méritos de los *Elementos* de EUCLIDES.

No obstante ser los *Elementos* un conjunto sistemático y sistematizado de conocimientos, es claro que no representa el conjunto de todos los conocimientos matemáticos que poseían los griegos de la época de EUCLIDES. Por lo pronto, los *Elementos* no podían contener sino aquellos conocimientos compatibles con el método euclideo, es decir: que podían deducirse de los postulados que, explícita o implícitamente, le servían de fundamento. Por eso no hay en ese tratado mención alguna de los tres problemas clásicos ya citados, ya que todas las investigaciones realizadas sobre los mismos exigían recursos que iban más allá de esos postulados. Tampoco podían contener los *Elementos* todas las propiedades que se dedujeran de aquellos postulados. Además de la imposibilidad material que esa inclusión implicaba, hubo omisiones, deliberadas unas, forzosas otras. Entre estas últimas, constituidas por las propiedades desconocidas en tiempos de EUCLIDES o que éste no estudiara o no hubiera podido deducir, son singularmente importantes las que se refieren a la geometría de la medida (comparación de áreas y de volúmenes), campo en el que los *Elementos* se muestran muy limitados.

Finalmente existía otro grupo de conocimientos matemáticos, a principios del siglo III, que no podían estar incluidos en los *Elementos*. Nos referimos en primer lugar a la llamada «logística», vale decir, los conocimientos de aritmética (sistema de numeración, reglas operatorias), necesarios para las aplicaciones numéricas de la vida diaria o de otras ciencias; y en segundo lugar, a aquel conjunto de conocimientos de ciencia natural que por su fácil geometrización se construyó en íntima conexión con la matemática, ya por su origen, ya por sus investigadores, ya por su método. Ese conjunto comprendía la astronomía, la óptica y la cinemática. Como único ejemplo de esa conexión anotemos que las nociones de geometría esférica (propiedades geométricas de la esfera) eran entonces incumbencia de los astrónomos y no de los geómetras.

Además de los *Elementos*, indudablemente su obra máxima, se deben o atribuyen a EUCLIDES otras obras. Algunos editores antiguos agregaron a los 13 libros de los *Elementos* que hemos reseñado, dos libros más que luego se comprobó que se debían a autores posteriores. En cambio, entre las restantes obras que se consideran de EUCLIDES, algunas de las cuales se han perdido, figuran escritos de índole estrictamente geométrica, y hasta que parecen haber sido complementos de los *Elementos*, y otros relacionados con aquellos sectores científicos que por su índole los griegos incluían en su matemática: acústica, astronomía, óptica, mecánica.

§ 14.—ARQUÍMEDES

ARQUÍMEDES, sin duda la figura máxima de la matemática griega, es al mismo tiempo una de las más altas cumbres de la matemática y de la ciencia de todos los tiempos.

ARQUÍMEDES, nacido en Siracusa en 287 a. de C. y

muerto en 212 a. de C. en el saqueo que siguió a la caída de esa ciudad en manos de los romanos, dedicó toda su vida a la investigación científica. Su vida, como la de otros grandes sabios, fue embellecida o deformada por la imaginación popular, vistiéndola con anécdotas más o menos verosímiles y exaltándola con elogios tales que a veces la rodearon de una atmósfera sobrenatural. Hasta su muerte fue envuelta por cierta atmósfera novelesca y narrada de diversas maneras. El acto del soldado romano que atraviesa con su espada al viejo sabio absorto en una investigación geométrica, no ha dejado de excitar la imaginación, llegándose hasta a convertirlo en un símbolo.

La fama de ARQUÍMEDES hoy sobrevive, no por su vida sino por su obra. Obra de caracteres propios y originales que denuncia sobre todo a un investigador. Sus escritos son verdaderas memorias científicas, trabajos originales en los que se da por conocido todo lo producido antes sobre el tema y se aportan elementos nuevos, propios. De ahí la aparente inconexión de sus escritos en lo que atañe a los temas; de ahí también que ninguno se destaque especialmente; todos son igualmente importantes, todos son originales y representan una nueva contribución, ya una idea, ya un método.

En sus escritos siguió rigurosamente el método euclideo de fijar previamente las hipótesis que postulaba, a las que seguían los teoremas cuidadosamente elaborados y terminados, sin que en general se advierta en ellos el método de descubrimiento, que parece a veces hasta deliberadamente ocultado, hecho que unido a la dificultad intrínseca del tema en muchas ocasiones, hace su lectura pesada y difícil.

La índole misma de los trabajos de ARQUÍMEDES y el hecho de que probablemente algunos de sus escritos se han perdido, impide encontrar entre ellos nexo lógico o cronológico alguno. Pero con esos escritos ARQUÍMEDES ha intervenido con eficacia en todos los campos de la

matemática griega; ya en sus ramas estrictas: geometría y aritmética; ya en astronomía y en ciertos sectores de la física que los griegos geometrizaron, como la estática y la hidrostática. Analizaremos someramente los escritos de ARQUÍMEDES siguiendo este orden.

Consideremos en primer lugar el escrito *De la esfera y del cilindro,* por su vinculación directa con los *Elementos* de EUCLIDES, de los que puede considerarse un complemento, pues trae una serie de teoremas relativos a áreas y volúmenes de cuerpos redondos que no figuraban en los *Elementos,* algunos de los cuales están hoy incorporados a nuestra geometría elemental. Entre esos teoremas figura el que expresa la relación entre las áreas y volúmenes de la esfera y del cilindro circunscrito, cuya figura ARQUÍMEDES deseó que se grabara sobre su tumba. En cierto sentido, una continuación del escrito anterior la constituye el trabajo *De los conoides y de los esferoides* en el que ARQUÍMEDES estudió las propiedades de algunos cuerpos redondos, incluidos hoy en las cuádricas de revolución. Ha de agregarse que en las demostraciones de estos trabajos, así como en otras semejantes que figuran en otros escritos, ARQUÍMEDES hace uso de recursos que implican conceptos que hoy aparecen en nuestro análisis infinitesimal.

De sus trabajos de geometría plana recordemos: *De las espirales,* uno de sus escritos más difíciles, en el que estudia las propiedades de la curva que hoy llamamos «espiral de Arquímedes»; el escrito *Cuadratura de la parábola,* en el que por primera vez se da la equivalencia entre una figura mixtilínea y otra poligonal, demostrando la equivalencia entre un segmento de parábola y un triángulo; y el trabajo *De la medida del círculo,* uno de los más breves de ARQUÍMEDES, pero probablemente uno de los más importantes, pues no sólo demuestra con él la equivalencia entre el problema de la cuadratura del círculo con el de la rectificación de la circunferencia, sino que, además, da una importante

solución aproximada de esos problemas, que involucra interesantes consideraciones aritméticas.

También figuran cuestiones aritméticas, de otra índole, en uno de los escritos más originales de ARQUÍMEDES, comúnmente denominado *El Arenario*. Se trata de un trabajo dedicado al hijo del tirano de Siracusa, del cual era preceptor, y cuya finalidad era probar que el número de granos de arena que llenara todo el universo podía contarse, sobre todo, nombrarse.

Este escrito posee un triple interés: *a*) como ARQUÍMEDES necesitará manejar números muy grandes, créa para este fin un sistema de numeración especial con el cual podrá contar y denominar esos números; *b*) al hacer alusión al universo que deberá llenar con granos de arena elige un universo de dimensiones mayores que el que ordinariamente concebían los astrónomos de la época: el universo ideado por ARISTARCO de Samos, que algunos historiadores actuales denominan «el Copérnico de la antigüedad», pues es autor de un sistema heliocéntrico: precisamente el interés de *El Arenario* reside en el hecho de ser uno de los escritos que nos ha quedado que hace mención de ese sistema, y *c*) *El Arenario*, por último, es el único escrito en que ARQUÍMEDES demostró poseer conocimientos astronómicos completos, y en él expone un procedimiento ingenioso para determinar el diámetro aparente del Sol, dando un valor bastante aproximado del mismo.

Tales son las más importantes contribuciones estrictamente matemáticas que se deben a ARQUÍMEDES. Sin embargo podemos aún mencionar sus trabajos sobre la estática, que en la concepción antigua quedaban incluidos en la matemática. Son ellos: el escrito denominado *Del equilibrio de los planos*, en el que enuncia la ley del equilibrio de la palanca; y el escrito *De los cuerpos flotantes*, en el que se estudia científicamente el equilibrio de los cuerpos sumergidos y se enuncia el célebre principio que hoy lleva su nombre.

Mencionemos, por último, uno de los trabajos más originales e interesantes del sabio de Siracusa: una larga carta dirigida a ERATÓSTENES, hoy conocida con el título abreviado *Método,* en la que ARQUÍMEDES expone un procedimiento, mezcla de consideraciones geométricas y mecánicas, mediante el cual llegaba a descubrir propiedades (áreas, volúmenes, centros de gravedad) que luego demostraba rigurosamente con recursos estrictamente geométricos.

En definitiva, puede decirse que ARQUÍMEDES lleva la matemática griega a su nivel máximo. Sin duda que él encontró ya una ciencia madura, a la que agregó nuevos capítulos y en la que mejoró los existentes. Pero en esta obra de complemento y de perfeccionamiento confirió a la ciencia una mayor flexibilidad haciendo más maleable el rígido sistema euclideo, y una mayor riqueza y autonomía, pues en ARQUÍMEDES han desaparecido casi totalmente los lazos que hasta entonces habían mantenido ligadas la matemática griega con la filosofía griega.

Esta mayor libertad y autonomía, sin descuido del rigor, que se muestra en la elección de los postulados, en las aplicaciones y problemas, en sus incursiones por el campo de los números y de la matemática aproximada, hacen de ARQUÍMEDES un gran matemático, en el sentido actual y permanente del vocablo (*).

§ 15.—LA MATEMÁTICA GRIEGA

El tercer gran matemático del período alejandrino es APOLONIO de Perga, de cuya vida se tienen muy escasas noticias, considerándose que floreció hacia comienzos del siglo II a. de C.

(*) Para un análisis más detallado de ARQUÍMEDES y de su obra puede verse, de esta misma colección, nuestro *Arquímedes,* Buenos Aires, 1948.

Así como en la historia de la matemática el nombre de EUCLIDES está indisolublemente ligado al de sus *Elementos*, el nombre de APOLONIO lo está con el de sus *Cónicas*, que, por lo demás, es el único (y aun incompleto) de sus escritos que poseemos. En esta obra, a la que debe su merecida fama de gran matemático, APOLONIO estudia en forma exhaustiva las propiedades de esas curvas, a través de una teoría general de las mismas y de algunas de sus propiedades especiales más importantes.

Con EUCLIDES, ARQUÍMEDES y APOLONIO la matemática griega llega a su apogeo, de ahí que podamos reseñar ahora cuáles han sido sus características.

La primera nota matemática que aporta el espíritu griego es la *demostración:* las propiedades matemáticas dejan de ser *hechos* para convertirse en *conocimientos*. Esa demostración, con que los griegos otorgan a la matemática su sello característico y permanente, arranca de las críticas eleatas, se elabora en el seno de las discusiones de los sofistas y encuentra su elemento constructivo en el *Órgano* aristotélico.

La segunda nota matemática permanente que aportan los griegos es la *abstracción*. Pero la abstracción de la matemática griega tiene caracteres específicos, rasgos propios conferidos por el pitagorismo que la vio nacer. Este tipo especial de abstracción de la matemática griega, semejante a la de las ciencias naturales actuales, es el que le confiere sus notas características. Hace de ella una matemática «táctil» apegada a los cuerpos naturales, una matemática de figuras, como se comprueba con su concepción corporal y geométrica de los números.

Este carácter táctil de la matemática griega explica también su predilección por lo finito y su preocupación por eliminar, o por lo menos, reprimir el infinito en sus demostraciones.

Esa abstracción de la matemática griega, abstracción que inicia sus primeros balbuceos, es la que explica también que la matemática no haya logrado grandes generalizaciones entre los griegos. Es una matemática que va a la caza, no de teorías generales, sino de problemas singulares, aunque a veces las nociones previas que la solución de esos problemas exige son tantas y tan complejas, que de por sí pueden considerarse como constituyendo un sistema, tal como ocurre con los *Elementos*.

Esta predilección por el problema y la correlativa despreocupación por una teoría general, les impidió ver el proceso y la continuidad en su totalidad, y por tanto les ocultó la importante noción de variabilidad, mostrándose así otra característica de la matemática griega: su estatismo, su carácter más estático que dinámico, más cinemático que cinético. Este carácter estático de la matemática griega se debe en gran parte a la influencia del platonismo que, por lo demás, se ha ejercido también en otros aspectos de esta ciencia. Así, al acentuar el carácter ideal de los objetos matemáticos ha conferido a éstos una de sus notas permanentes; pero al mismo tiempo, en conexión con su teoría de las ideas, ha arrojado esos objetos en un transmundo, lejos de todo contacto y vinculación con este mundo sublunar de los hombres y de las cosas.

De ahí el destierro a que se condenara a la aritmética práctica (la «logística» de los griegos); de ahí su inaplicabilidad a la ciencia natural, con las escasas excepciones que muestran las consideraciones geométricas de la astronomía, óptica y estática griegas que, bien examinadas, más que ramas de la ciencia natural, deben entenderse como ramas de la misma matemática griega, pues poseen todos los caracteres que hemos descubierto en esa matemática.

§ 16.—Epígonos y comentaristas. Diofanto

En el período helenístico, además de los «tres grandes», cabe aún mencionar a Eratóstenes de Cirene, contemporáneo, aunque más joven, de Arquímedes, que fue bibliotecario en Alejandría y sabio de actividad múltiple: geógrafo, matemático, filólogo. En matemática su contribución más importante es una resolución del problema de Delos, de interés, pues con ella dio la historia del problema y de los intentos anteriores para resolverlo.

También dieron soluciones a ese problema otros dos matemáticos de este período: Nicomedes y Diocles. Queda la discutida figura de Herón de Alejandría, de identificación y ubicación difíciles, aunque es probable que haya vivido en esa ciudad en el siglo I a. de C., ocupándose principalmente de cuestiones de mecánica y geometría prácticas. Pero, no obstante tal finalidad, mostró un amplio conocimiento de la geometría griega, como lo confirman los agregados y perfeccionamientos a los *Elementos* que se le atribuyen. Prueba cabal de ello es el teorema, que por primera vez aparece en sus escritos, que expresa la relación entre el triángulo y sus lados. La demostración de esa relación, que hoy expresamos algebraicamente mediante la llamada «fórmula de Herón», constituye uno de los más hermosos teoremas geométricos de los griegos.

Al iniciarse la era cristiana, la matemática griega entra en un período de cristalización y de crisis, en el que ya no figuran creadores, sino epígonos, glosadores y comentaristas, de los que citaremos únicamente los más importantes.

De fines del siglo I, o comienzos del II, es Nicomaco de Gerasa, autor de una obra aritmética, de escaso valor científico, pero importante por haber sido el libro que durante toda la Edad Media sirvió para la ense-

ñanza de la aritmética. Contemporáneo de NICOMACO es MENELAO de Alejandría, con el cual llega a su culminación el estudio griego de la geometría esférica. Con MENELAO hace su aparición el «triángulo esférico», importante figura que MENELAO estudia siguiendo un camino semejante al recorrido por EUCLIDES al estudiar los triángulos planos, mostrando las analogías y las diferencias entre las dos clases de triángulos.

Con esta labor de MENELAO se vinculan los trabajos matemáticos de la figura científica más importante de esta época: Claudio PTOLOMEO, el sistematizador de la astronomía antigua que sentó los fundamentos científicos de la concepción geocéntrica que se mantuvo durante 14 siglos.

La contribución matemática de PTOLOMEO está diseminada en sus escritos astronómicos, en especial en el primer libro de su célebre *Sintaxis matemática* (más conocida como *Almagesto*), que reúne todas las cuestiones preliminares necesarias para el estudio racional de los fenómenos celestes. En este sentido una exigencia fundamental requería la determinación de una «tabla de cuerdas» correspondientes a los distintos arcos, partes alícuotas de la circunferencia. Esta obra iniciada por el gran astrónomo HIPARCO de Nicea, que habría introducido en la astronomía griega la división sexagesimal de los babilonios, fue continuada y perfeccionada por PTOLOMEO, quien utilizó también los resultados de MENELAO para el análisis de los triángulos esféricos; de manera que en el *Almagesto* puede verse la primera sistematización de lo que hoy llamamos «trigonometría plana y esférica». En muchas de las expresiones que en él figuran, basta cambiar la palabra «cuerda» por la locución «doble del seno del arco mitad», para obtenerse expresiones de nuestra trigonometría.

Después de PTOLOMEO cabe citar la última figura matemática importante vinculada con la escuela de Alejandría: PAPPUS, cuya *Colección matemática* es un resu-

men de todos los conocimientos anteriores con agregados, críticas y correcciones del autor, de un valor inestimable por las informaciones históricas y bibliográficas que contiene acerca de la matemática griega. También de importancia histórica, por sus numerosas noticias referentes a autores anteriores, es la parte matemática del *Comentario a los «Elementos» de Euclides* del ya mencionado PROCLO de Bizancio, del siglo V.

De las consideraciones anteriores hemos excluido intencionadamente una figura matemática, que por presentarse aislada en el conjunto de la matemática griega, preferimos tratarla también aisladamente. Es DIOFANTO de Alejandría, probablemente del siglo III, que más que un cultor de la aritmética y sobre todo de la geometría, como lo fueron los científicos griegos, debe considerarse un precursor del álgebra y en cierto sentido, más vinculado con la matemática de los pueblos orientales que con la de los griegos.

La obra más importante de DIOFANTO es su *Aritmética,* por su novedad y originalidad única en toda la literatura matemática griega, pues en lugar de enunciar teoremas y proposiciones, no trae sino problemas, en su mayoría, entre números abstractos.

En la resolución de esos problemas, algunos muy difíciles que pertenecen al hoy llamado «análisis indeterminado», DIOFANTO aplica cierto simbolismo semejante al actual de los polinomios con una letra, y utiliza métodos diferentes para cada caso particular, pero esos métodos y los recursos auxiliares de que DIOFANTO echa mano son tan ingeniosos y fecundos, que confieren a toda la obra una peculiar fisonomía algebraica que la caracteriza y distingue de los demás escritos griegos. Claro es que la habilidad e ingeniosidad de DIOFANTO no son casuales; se fundan sobre el conocimiento de una gran cantidad de propiedades aritméticas que revelan en él un cabal matemático.

INTERMEDIO

§ 17.—La matemática en Occidente hasta fines de la Alta Edad Media

En el mundo romano, la matemática no tuvo cabida, por lo menos entendida en el sentido griego. En las enciclopedias, a las que fueron tan afectos los polígrafos romanos, no figuraba de la matemática sino las nociones destinadas a las aplicaciones: ya los conocimientos aritméticos útiles para satisfacer las necesidades de la vida diaria o las exigencias de las transacciones comerciales o, a lo sumo, para alguna cuestión tribunalicia; ya los conocimientos geométricos requeridos por la agrimensura y la agricultura, conocimientos que se limitaban a unas cuantas fórmulas empíricas o aproximadas para la determinación de las áreas de las figuras planas.

Pero con la decadencia y división del imperio (siglo IV) y con el fin del imperio de Occidente (siglo V) se nota en los escritores romanos cierta reacción favorable a los textos griegos. Así, a mediados del siglo V el cartaginés Marciano Capella escribe una enciclopedia sobre las siete *Artes liberales,* es decir: gramática, dialéctica y retórica (trivium), geometría, aritmética, astronomía y música (cuadrivium), que gozó de gran estimación y difusión durante la Edad Media. En ella la geometría se reduce a las definiciones de los *Elemen-*

tos con el enunciado del primer problema; y la aritmética a unas cuantas nociones de carácter neopitagórico.

Entre los enciclopedistas posteriores a CAPELLA, recordemos a Severino BOECIO, que entre las numerosas obras antiguas que parece haber compilado figura una de carácter aritmético, que no es sino la versión de la *Aritmética* de NICOMACO y que tuvo gran difusión en la época medieval; a CASIODORO, en cuya enciclopedia figura, además de un resumen de la aritmética de BOECIO, otro de los *Elementos* de EUCLIDES; y el famoso ISIDORO de Sevilla que en su obra, de finalidad etimológica, considera todas las disciplinas de su época, su clasificación, así como da la definición de sus términos técnicos.

El próximo nombre ya no pertenece a la cuenca del Mediterráneo. Es el del inglés BEDA *el Venerable* de fines del siglo VII que, además de su obra como historiador eclesiástico, se le deben algunos escritos sobre los elementos del cálculo numérico. A la larga, las enseñanzas de BEDA han de haber influido sobre ALCUINO de York, del siglo VIII, que desempeñó un papel importante en el llamado «renacimiento carolingio», pues fue uno de los pocos maestros a los que acudió CARLOMAGNO para mejorar el estado general de ignorancia de su reino. Se debe a ALCUNIO un escrito «para desarrollar el ingenio de los jóvenes», mezcla de problemas aritméticos y geométricos, en general muy simples, con cuestiones místicas y recreativas que poco tienen que ver con la matemática.

Si al escaso valor científico de esos problemas se agrega el hecho de que ALCUINO fue considerado como uno de los hombres más sabios de su tiempo, es fácil advertir el bajo nivel a que había descendido la matemática en Occidente. Sin embargo, en los siglos siguientes descendió aún más, cuando a raíz de la muerte de

CARLOMAGNO desaparece también el «renacimiento carolingio».

Pero pronto asomará un nuevo despertar, favorecido por los vientos que venían del Oriente.

§ 18.—El aporte oriental

El aporte oriental a la matemática durante el primer milenio de nuestra era proviene de tres centros culturales distintos: chino, hindú, árabe; distintos también fueron su valor y su influencia.

En este sentido parece ser la matemática china la que ejerció menor influencia, por lo menos ante la escasa documentación existente al respecto. En efecto, de los documentos existentes se desprende que la matemática china no difiere esencialmente de la de los antiguos pueblos orientales en lo que se refiere al nivel de los conocimientos: un sistema de numeración, el empleo del ábaco de uso inmemorial en China, el conocimiento del teorema de Pitágoras en el caso clásico 3, 4, 5, fórmulas empíricas y aproximadas para las áreas y volúmenes de figuras simples, y una colección de problemas, de interés muy dispar, de aritmética y de geometría. Como único dato interesante, mencionemos la presencia de cuadrados mágicos, que parecen de origen muy antiguo entre los chinos.

De los libros matemáticos chinos posteriores al siglo x, es difícil deslindar lo que pertenece a los chinos de lo que pudo ser importado de otras culturas: hindú o árabe.

En cambio, a la matemática hindú se deben aportes originales importantes, así como una notable influencia sobre la matemática árabe y, por intermedio de ésta, sobre la matemática occidental.

Pero la ausencia de indicaciones de fechas en casi toda la literatura hindú, unida a la circunstancia de es-

tar en verso los escritos matemáticos, redactados en un lenguaje confuso y místico y vinculados con cuestiones astronómicas y religiosas sin demostraciones y sólo con ejemplos numéricos, torna difícil, no solamente precisar la época de esos escritos, sino también valorar la originalidad y el mérito de los mismos.

Sin duda, hay en la matemática hindú una propensión mayor hacia los números que hacia las figuras; de ahí que sus contribuciones más importantes se refieran a la aritmética, al álgebra y a la trigonometría. Sin embargo, los conocimientos más antiguos que se atribuyen a los hindúes están vinculados con la geometría: aparecen en unos comentarios teológicos relacionados con los himnos sagrados y con la práctica de los sacrificios, que se suponen de una época comprendida entre los siglos VIII y II a. de C. Entre esos comentarios figuran escritos que contienen reglas para la construcción de los altares destinados a los sacrificios, con un complemento que trae reglas para la construcción de cuadrados y de rectángulos.

Pero estas construcciones geométricas ya no se presentan en las obras hindúes posteriores, que aparecen en el período llamado astronómico y matemático, transcurrido entre los siglos IV y XII de nuestra era. Las obras más antiguas de este período son de carácter astronómico y de evidente influencia griega. Su importancia matemática, además de su influencia en el mundo islámico, reside en el hecho de que en esas obras aparecen por primera vez algunas de las hoy llamadas «funciones circulares», de tanta aplicación en la trigonometría y en toda la matemática.

Mayor desarrollo de esos conceptos aparecen en los matemáticos hindúes posteriores, de los que citamos únicamente los tres más renombrados: ARYABHATA, BRAHMAGUPTA y BHASKARA.

Además de ocuparse de las funciones circulares, ARYABHATA (nacido en 476) se ocupó de cuestiones arit-

méticas y sobre todo de «análisis indeterminado» en un sentido distinto del de DIOFANTO y más próximo al actual. También se ocuparon de análisis indeterminado BRAHMAGUPTA (del siglo VII), a quien se debe además la mención de las propiedades del cuadrilátero inscriptible; y BHASKARA (siglo XII), cuya obra es sin duda la más importante de la matemática hindú, aunque en ella sean visibles las influencias, no sólo griegas, sino árabes y hasta chinas.

Además de los aportes individuales, se deben a la matemática hindú dos aportes colectivos de gran trascendencia: la contribución al simbolismo algebraico y el sistema de numeración posicional de base 10.

El álgebra de los hindúes es en general retórica, vale decir, sin símbolos ni abreviaturas, pero en las obras más recientes hacen su aparición cierto simbolismo y el uso de iniciales, que le confieren el aspecto de álgebra sincopada (etapa intermedia entre el álgebra retórica y la actual simbólica). Entre las innovaciones que presenta el álgebra de los hindúes, citemos el uso de sílabas diferentes para indicar incógnitas distintas, cosa que no ocurría en DIOFANTO; la distinción entre números positivos y negativos, que interpretaban como créditos y débitos y que diferenciaban simbólicamente; y sobre todo el uso del cero, no sólo como cifra numérica, sino también como símbolo operatorio.

En cuanto al sistema de numeración posicional, usado por los hindúes en sus cálculos aritméticos y astronómicos mediante el empleo de diez signos especiales que, modificados, constituyen nuestro sistema de numeración, su origen ha suscitado controversias.

Hay que descartar, desde luego, el origen árabe como la usual locución de «cifras arábigas» puede hacer suponer (los árabes han sido los trasmisores, no los creadores); y descartado también que los hindúes hayan sido los creadores del sistema posicional (lo poseyeron los sumerios y los mayas), queda aún por discutirse el

origen del sistema posicional de base 10 que en definitiva dio lugar al nuestro actual. Ese origen puede ser hindú y muy antiguo, como sostienen algunos, fundados en la interpretación de un texto religioso anterior a la era cristiana, o puede ser griego, como sostienen otros, admitiendo que el sistema haya nacido en el seno de los neoplatónicos desterrados en Persia, desde donde se habría difundido hacia el Este y hacia el Oeste.

En definitiva, la importancia y originalidad de la contribución hindú a la matemática se pone de manifiesto si se considera que, con los hindúes, penetra en la matemática el aprovechamiento de la fuerza latente que encierran las cifras y sus operaciones, así como el gusto por las transformaciones y por las combinaciones; y que además se deben a los matemáticos hindúes, como aportes particulares, la introducción de las funciones circulares, el uso del cero y métodos de análisis indeterminado.

La matemática árabe merece un párrafo especial.

§ 19.—La matemática árabe

El movimiento histórico denominado *Islamismo*, que se inicia con la «hégira» de 622, ha desempeñado un papel singular en el desarrollo de la ciencia durante el primer milenio de la era cristiana.

Cuando a mediados del siglo VIII los árabes, que por entonces dominan la mayor parte del mundo civilizado desde el Pamir hasta los Pirineos, detienen sus conquistas bélicas y su expansión política, la fisonomía del Islam se modifica. El contacto y las relaciones que los árabes establecieron con pueblos y regiones que eran o habían sido centros de grandes culturas, unido a ciertos factores aportados por el mismo Islam: la tolerancia que en general los conquistadores demostraron hacia los habitantes de las regiones sometidas, en especial

hacia cristianos y judíos; la atmósfera de libre discusión y libertad de opinión nacida con las polémicas religiosas y controversias teológicas surgidas en el seno del Islam, y la existencia de numerosas cortes que protegían y favorecían los estudios científicos, contribuyó a que a fines del siglo VIII el mundo islámico se encontrara en posesión de todos los elementos necesarios para el desarrollo de una gran cultura científica, cultura que desarrolló efectivamente y que logró su mayor esplendor entre los siglos IX a XI, y de la cual reseñaremos a continuación el aspecto matemático.

La primera manifestación cultural de la actividad científica de los árabes se pone de relieve en las traducciones al árabe de obras hindúes y griegas. Las primeras obras vinculadas con la matemática que se tradujeron al árabe, todavía en el siglo VIII, fueron las obras hindúes del período astronómico, con las que probablemente los árabes entrarían en contacto con las cifras hindúes.

Durante el siglo IX y los siguientes empezaron a aparecer las traducciones al árabe de las obras griegas, y algo después sus comentarios. Entre las traducciones de obras griegas citemos las de EUCLIDES, ARQUÍMEDES, APOLONIO, HERÓN, PTOLOMEO, PAPPUS, DIOFANTO, etcétera. Con estas traducciones los árabes entraron en posesión de buena parte de la matemática griega e hindú; posesión que ya desde comienzos del siglo IX empezó a dar sus frutos.

La primera figura que aparece en la matemática árabe es la de uno de los más grandes sabios del Islam: el geógrafo, astrónomo y matemático AL-KHUWARIZMI, de cuya vida poco se sabe, fuera de que trabajaba en la biblioteca del califa en la primera mitad del siglo IX. Su obra matemática revela influencias hindúes y griegas, estas últimas tanto en el sentido de EUCLIDES como en el de DIOFANTO. Últimamente se quiso ver en ella también influencias de la antigua matemática babilonia.

A su vez, esa obra influyó notablemente, no sólo en la ciencia del Islam, sino en la ciencia occidental cristiana posterior.

Se le debe una *Aritmética*, conocida sólo a través de su versión latina, que contribuyó a la difusión en el mundo árabe de las cifras hindúes y del cero y que, como en las aritméticas posteriores, contiene las reglas de las cuatro operaciones con enteros y fracciones y una serie de problemas.

Pero sin duda el libro de mayor importancia e influencia de AL-KHUWARIZMI es lo que podríamos considerar «literalmente» el primer tratado algebraico: es un trabajo cuyo título, de traducción aproximada: *Sobre el cálculo mediante la restauración y la reducción*, contiene el término árabe «al-gabar» que dio luego nacimiento a nuestro vocablo «álgebra»; así como del nombre de su autor surgió la palabra «algoritmo».

En ese «álgebra», que es retórica y en la que la incógnita se designa con la palabra «cosa», nombre con que más tarde pasó a Occidente, aparecen transformaciones de tipo algebraico para la resolución de ecuaciones, tratándose éstas siempre con casos particulares concretos y de coeficientes enteros y positivos.

Contemporáneo de AL-KHUWARIZMI fue THABIT b. QURRA, traductor e investigador, cuya contribución más interesante es un método para encontrar *números amigos*, es decir, números, cada uno de los cuales es suma de los divisores del otro (una pareja de números amigos es, por ejemplo, 220 y 284).

Algo posterior a los dos anteriores es ABU KAMIL, que floreció hacia el 900, algebrista que perfeccionó la obra de AL-KHUWARIZMI y que es uno de los primeros matemáticos que trata algebraicamente problemas geométricos.

En gran medida contribuyeron al progreso de la matemática en el Islam los astrónomos. En cierto sentido puede decirse que no hay entre los árabes matemáticos

puros: ante todo son astrónomos. Ya desde la primera época de la expansión árabe, las prescripciones religiosas plantearon a los astrónomos una serie de problemas de orientación y determinación de fechas y de horas, que exigieron la instalación de observatorios y el perfeccionamiento de las tablas e instrumentos utilizados, así como el estudio e investigación de las cuestiones astronómicas y matemáticas conexas.

Es a los astrónomos a quienes se debe la introducción y ampliación de las funciones circulares y el perfeccionamiento de las tablas de las mismas; y también a muchos astrónomos se deben investigaciones de carácter matemático, surgidas de la lectura y del estudio de los antiguos astrónomos griegos e hindúes.

Entre los astrónomos árabes que influyeron en el progreso de la matemática, citemos a AL-MAHANI, muerto hacia 874, que además de traducir obras de EUCLIDES y de ARQUÍMEDES, puso en ecuación (algebraica) el problema (geométrico) de ARQUÍMEDES de dividir una esfera en dos segmentos esféricos de razón dada. Por su parte las funciones circulares deben mucho al grupo de astrónomos: AL-HABASH, contemporáneo del anterior; AL-BATTANI, el *Albategnius* de los latinos, de fines del siglo IX y comienzos del X, y ABU AL-WAFA, de la segunda mitad del siglo X. A ellos se debe la ampliación de las funciones circulares a las seis funciones actualmente en uso y de sus primeras relaciones. Debemos sin embargo agregar que si bien la trigonometría plana y esférica continuó desarrollándose entre los astrónomos y matemáticos árabes, esas funciones no encontraron eco en los astrónomos árabes y cristianos posteriores hasta mediados del siglo XV.

También se ocuparon, en medida distinta, de matemática las tres figuras científicas más grandes de este primer período de la ciencia del Islam: AL-BIRUNI, IBN SINA e IBN AL-HAYTAM, todos contemporáneos.

La contribución matemática más importante de AL-BIRUNI, de la primera mitad del siglo XI, se refiere a la construcción de los polígonos regulares y su tratamiento algebraico. De IBN SINA, el *Avicena* de los latinos, sólo interesan algunas contribuciones aritméticas, mientras que IBN AL-HAYTAM, el *Alhazen* de los occidentales, se ha ocupado de distintas cuestiones aritméticas y geométricas. Vinculado con sus importantes investigaciones sobre óptica, se conoce un «problema de Alhazen», que algebraicamente conduce a una ecuación de cuarto grado que *Alhazen* resolvió mediante la intersección de una circunferencia con una hipérbola.

Entre los matemáticos del Oriente islámico durante el siglo XI, citemos a AL-KARKHI, en quien no se nota la influencia hindú, y el celebrado Omar KHAYYAM, astrónomo y matemático, probablemente el autor de las célebres cuartetas Rubaiyat. Como matemático se le debe un importante estudio algebraico y geométrico de las ecuaciones, hasta de tercer grado; y como astrónomo se le conoce por ser el autor de una reforma del calendario, tan exacta como la gregoriana, o más, según alguna interpretación.

Durante el siglo XII, la ciencia comienza a entrar en decadencia en el Oriente islámico, pero en cambio en ese siglo la ciencia árabe culmina en la península ibérica, donde por motivos políticos el movimiento cultural se había iniciado más tarde que en Oriente.

En la Iberia musulmana no abundan los matemáticos: citemos únicamente al astrónomo JABIR IBN AFLAH, del siglo XII, que alguna vez se confundió con el célebre, aunque inexistente, químico *Geber* de los latinos, y hasta se utilizó la semejanza de su nombre con la palabra «álgebra» para atribuirle haber inventado y dado nombre a esa rama de la matemática. Su contribución más importante a la matemática se refiere a la trigonometría esférica, donde existe un teorema llamado alguna vez «teorema de Geber».

Después del siglo XII, y durante algunos siglos más, la ciencia árabe continuó dando señales de vida, aunque con escasa o ninguna resonancia en el mundo cristiano. Así, durante la época del dominio mongol encontramos al sabio enciclopédico NASIR AL-DIN (siglo XIII), autor de numerosas obras, entre las que se cuentan traducciones y elaboraciones de autores matemáticos griegos. Es de interés señalar que se le debe una «demostración» del postulado de Euclides, único intento situado cronológicamente entre los realizados por los antiguos griegos y los que realizarán los hombres del Renacimiento y de la Edad Moderna.

Pero en la época de NASIR AL-DIN, la ciencia árabe había ya dejado de desempeñar su papel en el desarrollo de la ciencia mundial. Con todo, la cultura árabe, tan unificada por la fe y por el idioma, y tan diversificada por los aportes que le dieron vida y la heterogeneidad de los pueblos que puso en contacto, fue el único movimiento cultural creador y de gran envergadura de fines del primer milenio y comienzos del actual. En el aspecto matemático se le debe el haber sentado las bases del álgebra y sistematizado la trigonometría, y sobre todo haber conservado y transmitido el saber matemático antiguo, que en manos de los griegos había logrado tan alto nivel, y que al pasar al mundo occidental en el Renacimiento, en especial por intermedio de los árabes, volverá a cobrar altura.

---

§ 20.—LA ÉPOCA DE LA TRANSMISIÓN

Cuando a partir del siglo XI la cultura árabe comienza a mostrar signos de decadencia, en el mundo cristiano asoma un despertar cultural: tanto en Oriente como en Occidente. Si en el Oriente el llamado «renacimiento bizantino» no mostró mayor originalidad y vigor, en especial tratándose de matemática, en Occidente, ese

despertar, lento y con alternativas en sus comienzos, adquirió luego mayores impulsos para empalmar con el Renacimiento de los siglos XV y XVI y dar vida, más tarde, al gran movimiento cultural de la Edad Moderna.

En sus comienzos ese proceso cultural fue estimulado, y en cierto sentido acelerado por influencias árabes que se ejercieron a través de un triple conducto: las costas del Mediterráneo oriental durante las Cruzadas, Sicilia y España.

Aunque discutible, esa influencia puede ya notarse en GERBERTO de Aurillac, de la segunda mitad del siglo X, más tarde Papa, en cuyos escritos matemáticos, de escaso valor, aparecen las cifras hispano-arábigas (sin el cero). En cambio, es indiscutible la influencia árabe surgida de los contactos entre musulmanes y cristianos, ya a través de las Cruzadas, ya en Sicilia o en España. Esos contactos permitieron a los cristianos advertir el valor del saber, propio o ajeno, acumulado por los árabes, iniciándose entonces una era de transmisión de ese saber a través de traducciones, en gran parte del árabe al latín, aunque también del hebreo al latín, como del árabe al hebreo, y, en menor medida, del griego al latín.

Encontramos traductores en los viajeros que estuvieron en Oriente, así como en Sicilia, donde bajo los reyes normandos se produjo un intenso intercambio entre las culturas árabe, griega y latina; pero el centro más activo de traducciones fue España. Aquí encontramos parejas de traductores que trabajan en colaboración, traduciendo, por ejemplo, uno del árabe al castellano y el otro del castellano al latín; también encontramos verdaderas escuelas de traductores, como la de Toledo, dirigida por GERARDO de Cremona, del siglo XII, de la que se han catalogado no menos de 87 obras traducidas.

La obra de los traductores puso a disposición de los sabios occidentales el saber griego y el saber árabe, y esta circunstancia, unida a la atmósfera cultural de los

siglos XII y XIII, que vio nacer y desarrollar la escolástica y erigir las primeras universidades, iba a dar pronto sus frutos en el campo matemático.

§ 21.—El despertar matemático

En el mundo occidental, el despertar matemático se inicia en el siglo XIII por obra de Leonardo de Pisa o LEONARDO PISANO, también apodado *Fibonacci* (hijo de Bonacci), nacido hacia 1170 y muerto después de 1240. Durante su juventud había residido en Argelia y recorrido la cuenca mediterránea, sobre todo en las zonas de influencia árabe, con cuya cultura se puso en contacto, en especial a través del idioma y de la matemática.

Al reconocer las ventajas del empleo de las cifras arábigas en los cálculos numéricos frente a los procedimientos de la época, al regresar a su patria, en 1202, publicó su principal obra: *Liber Abaci*, que en 1228 amplió y reelaboró.

El título del libro no alude al ábaco como instrumento auxiliar en los cálculos, sino, por extensión, a los cálculos mismos, que LEONARDO enseña a realizar a la manera «algorítmica» con las cifras arábigas, y no a la manera de los abacistas con los números romanos. Sin haber sido en verdad LEONARDO el introductor en Europa de esas cifras, es indudable que fue él quien divulgó su uso y mostró sus ventajas. Claro que no por ello quedaron desterrados de inmediato las cifras romanas, que continuaron, con suerte variable, a ser utilizadas en los cálculos comerciales, así como el cálculo con el ábaco, manteniéndose durante mucho tiempo una lucha entre *abacistas* y *algorítmicos*.

Pero además de ese mérito y de la indiscutible originalidad que LEONARDO muestra en el tratamiento de las cuestiones matemáticas, se le debe el no menor de haber hecho conocer en su conjunto el saber aritmético y al-

gebraico de los árabes. Además del *Liber Abaci*, en el que LEONARDO trata en forma retórica cuestiones de aritmética y álgebra, escribió un tratado geométrico y otros escritos menores en los que, sin embargo, muestra LEONARDO sus dotes matemáticas originales.

Del mismo siglo que LEONARDO, aunque algo posterior, es Giovanni CAMPANO de Novara, a quien se debe una traducción de los *Elementos*, con comentarios. Esta traducción constituyó el primer texto impreso de EUCLIDES (Venezia, 1482), y en sus comentarios demuestra CAMPANO ser más que un mero traductor. Citemos únicamente que se le debe el intento, seguramente el primero, de fundar la aritmética de los números naturales sobre un sistema de axiomas y de postulados.

También al siglo XIII pertenece un autor (o autores) de identidad discutida: JORDANUS Nemorarius, a quien (o quienes) se atribuye, además de varios escritos importantes sobre mecánica y astronomía, escritos aritméticos y geométricos de no escaso valor; y SACROBOSCO (nombre latinizado de John de Hollywood), más conocido por su obra astronómica, pero que es también autor de un texto elemental de aritmética que mucho contribuyó a la difusión de las cifras arábigas y de la numeración decimal.

Además de la obra de los matemáticos citados, contribuyó al renacimiento científico de la época la peculiar atmósfera intelectual del siglo XIII, en el que la cultura medieval occidental alcanza su apogeo.

En los siglos siguientes esta atmósfera cultural irá lentamente modificándose: el espíritu medieval, bajo el signo del humanismo, se convertirá en el espíritu moderno, una de cuyas notas será precisamente la aceleración del progreso científico.

Durante esos siglos, que para la matemática van desde el XIV hasta fines del XVI, fecha en que se inicia para esta ciencia una nueva era, la labor matemática se con-

cretará a completar y perfeccionar la aritmética, el álgebra y la trigonometría.

Durante los siglos XIV y XV los progresos fueron escasos. La figura matemática más importante del siglo XIV es la de uno de los «Maestros de París»: Nicolás ORESME, en cuyas obras asoma la noción de representación gráfica de funciones, o mejor, fenómenos de una variable, así como otros conceptos matemáticos de los que puede considerarse precursor.

En el siglo XV, además del nombre del célebre Nicolás CUSANO, que también se ocupó de matemática, debemos citar los de los astrónomos Georg PEURBACH y su discípulo Johannes Müller, llamado el REGIOMONTANO. Con ellos progresa la trigonometría, debiéndose a REGIOMONTANO el primer tratado de trigonometría en latín que tuvo influencia duradera.

En cambio, a fines del siglo XV y durante el XVI, en pleno Renacimiento, los progresos fueron mayores.

LA MATEMÁTICA RENACENTISTA

§ 22.—El renacimiento de la matemática

Dos acontecimientos culturales del siglo XV tuvieron amplia repercusión en el desarrollo de la matemática. El primero fue la invención de la imprenta con tipos movibles, que facilitó extraordinariamente la transmisión y la difusión de los escritos científicos, circunstancia que, combinada con el «renacimiento de los clásicos», puso al alcance de los estudiosos los grandes monumentos científicos de la antigüedad. Ya dijimos que la versión latina de CAMPANO fue la primera edición impresa de los *Elementos* de EUCLIDES, en 1482, pero fue especialmente durante el siglo XVI cuando se dieron principalmente a la imprenta las obras matemáticas clásicas, de manera que al finalizar ese siglo, ya en idioma original o ya en versión latina, estaban a disposición de los estudiosos los escritos más importantes entonces conocidos de ARQUÍMEDES, APOLONIO, DIOFANTO...

Mientras tanto, aparecen los primeros escritos matemáticos impresos de los contemporáneos, el primero de los cuales es la llamada *Aritmética* «de Treviso», aparecida en esta ciudad en 1478, y el más importante, probablemente, es un escrito de Johann WIDMANN, de 1489, cuya mayor novedad reside en que en su segunda parte aparecen por primera vez los signos + y —, aunque no en la forma puramente simbólica con que hoy se utilizan.

Otro acontecimiento cultural del siglo XV, de influencia en el desarrollo de la matemática, fue la conjunción feliz que, especialmente en suelo italiano, se realizó entre la ciencia, la técnica y el arte, bajo el signo común del humanismo, y que puede simbolizarse en una de las figuras cumbres del Renacimiento: LEONARDO DA VINCI.

Así es cómo, especialmente por obra de artistas, las antiguas consideraciones griegas y árabes sobre la óptica geométrica dieron origen a una rama de la geometría: la *perspectiva*. Las primeras obras europeas con este título, del siglo XIII, son reelaboraciones de la óptica de IBN AL-HAYTAM que, sobre la de EUCLIDES, tenía la ventaja de considerar los rayos visuales como partiendo de los objetos y no del ojo, como los consideraba el geómetra griego.

Pero durante los siglos XIV y XV, la perspectiva va perdiendo su antiguo significado físico o físico-geométrico para convertirse en una rama de la geometría, cuyo problema capital es la intersección con un plano (el cuadro) de las rectas que partiendo de los distintos puntos del espacio llegan hasta el ojo. Es explicable que este problema geométrico haya surgido en el seno del arte pictórico, y en una época en que muchos pintores trataban de investigar los fundamentos científicos de su propio arte. A esos pintores y a tal tendencia pertenecen Filippo BRUNELLESCHI, Lorenzo GHIBERTI, y especialmente León Battista ALBERTI, típica figura del humanismo renacentista a quien se debe, entre otras obras, un escrito en latín y en vulgar en el que resume las consideraciones de la época sobre la geometría aplicada al dibujo y a la pintura.

Estas consideraciones dieron lugar, algo más tarde, a un tratado especial, el primero en su género, escrito también en lengua vulgar, del pintor PIERO DELLA FRANCESCA.

También LEONARDO DA VINCI y, ya en el siglo XVI, Albrecht DÜRER, se ocuparon de perspectiva y de otras

cuestiones matemáticas. Pero la figura matemática más importante vinculada con el mundo de técnicos y artistas del Renacimiento italiano es la de Luca PACIOLI, discípulo de PIERO DELLA FRANCESCA.

El mérito principal de PACIOLI, fuera del entusiasmo que muestra por la matemática en todos sus escritos, consiste en haber ofrecido, especialmente en su *Summa* impresa en 1494, un arqueo del saber matemático de su tiempo, que sirve admirablemente de jalón para apreciar los programas realizados desde LEONARDO PISANO y para medir también los avances que se harán en el futuro. Es una obra de carácter enciclopédico, cuyo objeto principal fue poner aquel saber a disposición de los técnicos, de los artistas y de los comerciantes, por lo cual utilizó la lengua vulgar.

Consignemos sólo dos detalles de la obra de PACIOLI en su aspecto algebraico: el de dar, sin mayores especificaciones, como «imposible» la resolución de la ecuación de tercer grado, y la terminología y abreviaturas utilizadas que caracterizan la etapa, en la evolución del simbolismo algebraico, que se ha denominado álgebra sincopada.

Sin embargo, en este último sentido son más originales las aportaciones de un francés de fines del siglo XV: Nicolás CHUQUET, que en una obra escrita en 1484 expone interesantes cuestiones de álgebra y utiliza un simbolismo bastante avanzado. Desgraciadamente, por haber permanecido inédita, esta obra ha ejercido escasa influencia.

§ 23.—LOS ALGEBRISTAS ITALIANOS DEL SIGLO XVI

A los algebristas italianos del siglo XVI debe la matemática el importante aporte del estudio y resolución de las ecuaciones de tercero y de cuarto grado. Esta contribución se realiza en la primera mitad del siglo, en circunstancias difíciles de precisar, dada la costumbre de

la época de mantener el secreto de los descubrimientos científicos con el objeto de prevalecer sobre los adversarios en los torneos y justas, a veces públicas, que se realizaban y en los que se planteaban problemas científicos.

Se atribuye a Scipione DAL FERRO, profesor de Bologna, el haber sido el primero en resolver uno de los tipos de la ecuación de tercer grado, hacia principios del siglo XVI; pero ni se conoce esta pretendida solución de DAL FERRO ni se ha logrado encontrar, no obstante las búsquedas, una libreta de apuntes en la que habría consignado esa solución, que de existir y ser correcta, se habría dado el caso, nada frecuente por cierto, de malograr voluntariamente una celebridad y una prioridad indiscutibles.

El hecho es que por esa época empiezan a aparecer entre las cuestiones propuestas a calculistas y algebristas italianos problemas que conducen a ecuaciones de tercer grado (cúbicas), figurando entre los proponentes un discípulo de DAL FERRO. En estas justas interviene uno de los matemáticos más importantes del siglo: Niccoló TARTAGLIA, quien, estimulado sin duda por esas cuestiones, encuentra por su cuenta la regla para resolver las ecuaciones cúbicas, logrando un decisivo triunfo, en un desafío matemático, sobre el discípulo de DAL FERRO. La fama que entonces conquista TARTAGLIA llega a oídos de otro matemático italiano, entonces profesor en Milano, Gerolamo CARDANO, curioso personaje que gozó de fama también como médico, astrólogo y alquimista, que, conocida la solución de TARTAGLIA, perfeccionó la cuestión, probablemente con la ayuda de uno de sus discípulos: Ludovico FERRARI, de valor singular como matemático, pues se le debe la resolución de la ecuación de cuarto grado. El desarrollo de este proceso científico no se realizó sin incidentes personales, que culminaron en una ruidosa polémica entre TARTAGLIA y FERRARI, de mediados de siglo, en la que según costumbre de la época, ambos adversarios se lanzaron «carte-

les» de desafío, con una serie de cuestiones propuestas (no sin improperios). De estos carteles, que se imprimían y difundían profusamente, hubo en esta polémica una docena: seis «carteles» y seis «contracarteles», de interés matemático relativo, aunque ellos ofrecen la única colaboración matemática escrita de FERRARI.

A los algebristas italianos del siglo XVI que acabamos de mencionar debe aún sumarse la importante figura del boloñés Rafael BOMBELLI, autor de un *Álgebra* (publicada en 1572) que contiene los resultados logrados por los algebristas anteriores, y además la consideración de un caso especial (hoy llamado el «caso irreducible») que había resistido hasta entonces a todos los esfuerzos y que BOMBELLI logra resolver mediante la introducción de recursos algebraicos, cuyo hallazgo lo convierten en el precursor, si no el inventor, de los números imaginarios, que recién se sistematizaron el siglo pasado.

§ 24.—LOS LOGARITMOS Y LAS FRACCIONES DECIMALES

Entre las aritméticas y álgebras aparecidas en el siglo XVI se destaca una *Aritmética* de Michael STIFEL, de 1544, en la que, además de otros progresos, asoma el concepto de *logaritmo,* ya como operación inversa de la potenciación, ya como una correspondencia entre los términos de una progresión aritmética y una geométrica, con su correlativa correspondencia entre las operaciones que se realizan con los términos de ambas progresiones.

Es posible que estas ideas influyeran en los matemáticos que trataban de simplificar las operaciones aritméticas, en vista sobre todo de las necesidades astronómicas, para lo cual recurrían a medios variados. Pero serán los logaritmos los que resolverán totalmente la cuestión, y han sido sin duda aquellas exigencias prácticas las que hicieron que la logaritmación, que es en

verdad la operación inversa de la exponenciación, naciera antes de que se constituyere esta operación directa.

También es posible que aquella preocupación por encontrar recursos que facilitaran las operaciones aritméticas explique que los logaritmos se hayan descubierto, independiente y casi contemporáneamente, por dos autores distintos, y que esos descubrimientos se publicaran en fechas muy cercanas; son esos autores el escocés NAPIER y el suizo BÜRGI, y esas publicaciones de 1614 y 1620, respectivamente.

Jobst BÜRGI, que fue un hombre versado en cuestiones de matemática, astronomía y mecánica, y sobre todo un hábil calculista, utiliza para sus «logaritmos» el procedimiento de las dos progresiones, tomando como razón de la progresión geométrica (nuestra «base» actual) un número algo mayor que la unidad, pero muy próximo a ella.

El proceso seguido por John NAPIER, que se destacó también en otras ramas de la matemática, es esencialmente distinto. Ante todo calculó los logaritmos de los senos de los ángulos y no de números, utilizando como «base» un número también próximo a la unidad, pero ahora algo menor (para evitar los números negativos). Además, y esto es un gran progreso teórico, introdujo los logaritmos (el nombre es de él) mediante una ingeniosa concepción cinemática, con la que implícitamente tuvo en cuenta la propiedad de ser continua la función logarítmica, circunstancia que no aparece cuando se consideran los logaritmos como los términos de una sucesión discreta, tal como es la progresión aritmética.

Los «logaritmos» de BÜRGI y de NAPIER se aproximan a los logaritmos hoy llamados *naturales*. Los logaritmos *decimales*, que son los que se utilizan actualmente en la práctica, nacieron, en cambio, de una entrevista entre NAPIER y BRIGGS, a raíz de que este último insinuara la conveniencia de adaptar los logaritmos al sistema de

numeración. Las primeras tablas de logaritmos decimales, calculadas por BRIGGS, aparecieron en 1624.

Esto nos lleva a hablar de la introducción en los cálculos aritméticos de las fracciones decimales, y por ende de los números decimales. En contra de lo que podría parecer, esa introducción no resultó ser una consecuencia natural del sistema decimal de numeración, pues la obvia observación de que la sucesión de potencias de 10 era tan válida en el sentido ascendente como en el descendente, no fue reconocida de inmediato.

Aunque el uso de las fracciones decimales y la notación respectiva fueron el resultado de una obra lenta y anónima, un gran impulso en tal sentido fue ejercido por uno de los grandes sabios de esta época: Simón STEVIN, célebre sobre todo por sus investigaciones sobre estática, y que en un folleto de 1585 se propuso hacer conocer «una especie de aritmética», con lo que «todos los cálculos que se presentan en los negocios humanos» pueden realizarse con números enteros, «sin fracciones», mostrando cómo para las fracciones decimales son válidas las mismas reglas que para los números enteros. Y es interesante destacar que en este mismo folleto STEVIN muestra las ventajas del sistema decimal, no sólo en las fracciones, sino en la adopción de un sistema de pesos y medidas, adelantándose un par de siglos a la idea del sistema métrico decimal.

Si bien la notación decimal comenzó a usarse desde fines del siglo XVI, no se generalizó hasta principios del siglo XVIII, y *su* simbolismo (el de STEVIN era poco feliz) fue tan variado que aun hoy no es uniforme.

Otro algoritmo, es decir combinación de operaciones, nace en esta época: el de las llamadas «fracciones continuas», que estaba implícitamente en el procedimiento de EUCLIDES para la determinación del máximo común divisor de dos números, pero que el siglo XVI extiende a los números irracionales (raíces cuadradas), dando así nacimiento a uno de los primeros algoritmos infinitos.

Aunque pueden encontrarse precursores, el uso sistemático de las fracciones continuas para la determinación (aproximada) de raíces cuadradas fue introducido por el profesor en la Universidad de Bologna Pietro Antonio CATALDI, en 1613.

§ 25.—EL ÁLGEBRA, LA TRIGONOMETRÍA Y LA GEOMETRÍA

Además de la resolución de las ecuaciones de tercero y de cuarto grado, y la creación de nuevos algoritmos, el siglo XVI ve completar y perfeccionar el álgebra y la trigonometría, mientras comienzan a asomar las primeras consideraciones de carácter infinitesimal que darán lugar en el siglo siguiente a una de las más grandes conquistas científicas de todos los tiempos: el análisis infinitesimal.

Poco a poco, a través de las aritméticas y álgebras que van publicándose en Europa, aparecen los símbolos algebraicos, pero el mayor progreso algebraico se debe al francés François VIÈTE, más conocido por su apellido latinizado *Vieta,* sin duda el más grande de los matemáticos de la segunda mitad del siglo XVI. En una de sus obras, de 1591, VIÈTE expone los principios fundamentales del álgebra, no sólo considerando el método analítico y sus etapas, en el sentido antiguo, sino estableciendo la serie de postulados en que han de fundarse las transformaciones algebraicas. Agrega que la debilidad de los antiguos analistas fue la de ejercitar sus facultades sobre los números, es decir, hacer lo que él llama «logística numerosa», dando a la palabra «logística» la acepción griega; mientras que lo que debe hacerse —continúa— es una nueva logística: la «logística speciosa», comparando entre sí las magnitudes. Es en esta «logística speciosa» donde reside uno de sus mayores méritos, pues ella trae consigo la importante innovación de utilizar en las cuestiones cantidades cuales-

quiera y por tanto introducir en el álgebra el uso de las letras.

En ésta y otras obras, VIÈTE desarrolla casi todo el algoritmo algebraico actual, otorgándole unidad y orden lógicos, no obstante el lenguaje oscuro y difícil que utiliza, agravado por el excesivo número de helenismos y neologismos que introduce.

En la teoría de las ecuaciones se le deben algunos progresos, pero en este campo son más importantes las contribuciones de Albert GIRARD, discípulo y editor de STEVIN, entre las cuales cabe citar su afirmación, sin demostrarla, que toda ecuación tiene tantas raíces como indica su grado, enunciado que constituye el llamado «teorema fundamental del álgebra», cuya primera demostración rigurosa aparecerá siglo y medio después.

Si del álgebra pasamos a la trigonometría, debemos recordar que, todavía en la primera mitad del siglo XVI, esta rama de la matemática sigue vinculada con la astronomía. Así, en la célebre *De revolutionibus* de COPÉRNICO, de 1543 (como en su antecesora: el *Almagesto* de PTOLOMEO), tres capítulos están dedicados a las funciones circulares. De ellos, dos habían aparecido el año anterior en un escrito del editor de COPÉRNICO, George Joachim, de apellido desconocido, pero llamado RHAETICUS, del lugar de su nacimiento. A RHAETICUS se debe el estudio sistemático de las seis funciones circulares que, por primera vez en Europa, aparecen definidas mediante los lados del triángulo rectángulo.

En esta época es cuando aparece por primera vez la palabra «trigonometría», cuyo mayor progreso se logra también por la obra de VIÈTE, en cuyos escritos no sólo aparecen las relaciones fundamentales entre las funciones circulares de los ángulos y de sus múltiplos, sino también los principales teoremas, aunque en forma distinta de la actual, de la trigonometría plana y esférica.

Frente a estos importantes progresos del álgebra y de la trigonometría, el siglo XVI no señala progresos

semejantes en el campo de la geometría, donde las mayores contribuciones han de verse en los comentarios y versiones de las antiguas obras geométricas de los griegos. Entre los comentaristas y traductores debemos citar a Francesco MAUROLYCO, quizá el más grande de los geómetras del siglo, a quien se debe también la aplicación, en forma rudimentaria, del «método de inducción completa» para la demostración de ciertas propiedades de los números. El principio de inducción completa, que está implícito en algunas demostraciones de EUCLIDES, es considerado por MAUROLYCO, y otros matemáticos posteriores, como un principio lógico, mientras que hoy se ve en él una propiedad característica de la sucesión de los números naturales.

La perspectiva, rama de la geometría entonces en formación, encontró un sistematizador teórico en Guidubaldo DEL MONTE y un divulgador práctico en Jacobo BAROZZI, apodado *il Vignola*, por el nombre de su pueblo natal, que por la celebridad y fama que gozó su obra convirtió este nombre en sinónimo de arquitectura.

Agreguemos que es en este siglo que el problema de la cuadratura del círculo adquiere un renovado vigor, y que probablemente data de esta época la fama, generalmente basada sobre la ignorancia de los términos del mismo, que gozó el problema hasta fines del siglo pasado. En tal sentido, además de la labor de algunos calculistas que expresaron el valor de π hasta con 35 decimales, debe destacarse la obra de VIÈTE, que fue también hábil geómetra, al cual se debe la primera expresión convergente de ese célebre número mediante su desarrollo en producto infinito.

Para terminar de caracterizar el siglo XVI agreguemos que en él se introduce la matemática en Extremo Oriente, en especial por obra de los misioneros jesuitas, y que aparece en el Nuevo Mundo el primer libro impreso de matemática: una modesta aritmética mercantil publicada en México en 1556.

Con el siglo XVI puede decirse que se cierra un nuevo período en el desarrollo de la matemática: es el período que va desde la decadencia griega hasta el advenimiento de la ciencia moderna, advenimiento que significa para la matemática la iniciación de una nueva era, en la que aún vivimos, de constantes e ininterrumpidos progresos y creaciones.

En aquel período, que transcurre entre los principios de la era cristiana y los comienzos del siglo XVII, la matemática ha conquistado un nuevo territorio: el álgebra, diferente en su forma y en su contenido de la geometría, tan brillantemente cultivada por los griegos. En esta nueva rama la abstracción matemática adquiere una jerarquía superior, como si se elevara respecto de la abstracción geométrica de los griegos.

Los objetos matemáticos dejan de ser números particulares, que cuentan o miden las cosas del mundo; dejan de ser figuras que aluden a los cuerpos y objetos naturales; los objetos matemáticos son ahora las letras, esas *especies* de la «logística speciosa» de VIÈTE, son los símbolos algebraicos que no se refieren a un número particular o a una cantidad geométrica especial, sino a todos los números, a todas las cantidades.

El carácter simbólico que el álgebra confiere a la matemática muestra algunas notas permanentes de ésta, que la geometría griega había ocultado. Ante todo, su carácter de ciencia ideal se torna específica: los objetos matemáticos pertenecen sí a una esfera especial que está desvinculada del mundo exterior, pero que también lo está del mundo de las «ideas» platónicas; es un mundo con notas especiales; inespacialidad, atemporalidad, y tipo de abstracción específica.

Por otra parte, los recursos del álgebra permiten unificar la aritmética aplicando un molde común a las propiedades de los números, cualesquiera sean éstos, y conferir a la matemática métodos de una generalidad tal que la geometría no podía permitirse.

Es claro que un teorema geométrico es general, pero esa generalidad es limitada. Si demostramos el desarrollo del cuadrado de una suma mediante la conocida descomposición de un cuadrado en dos cuadrados y dos rectángulos, esa demostración no sólo está limitada en el sentido de la naturaleza de los sumandos, que han de ser exclusivamente segmentos, sino también porque ella muestra únicamente *una* descomposición del cuadrado de una suma, precisamente aquella indicada en la figura. En cambio, la identidad algebraica que expresa el cuadrado de un binomio como suma de dos cuadrados y de un doble producto, es general en el amplio sentido que sus letras «vacías» permiten ser llenadas con cualquier contenido: sean números o medidas, sea cual fuere su naturaleza o la naturaleza de las magnitudes cuyas cantidades miden.

Esta amplitud del contenido de los símbolos algebraicos permitirá que la matemática adquiera un carácter dinámico, opuesto al carácter estático que le confería la geometría, y facilitará el planteo y la solución de un nuevo tipo de problemas que bien pronto abordará la matemática: los problemas de la continuidad y de la variabilidad, cuyo dinamismo interno será legislado por el análisis infinitesimal.

En resumen, puede decirse que al comienzo del siglo XVII los matemáticos disponen de dos grandes instrumentos: la geometría de los antiguos, con su estructura rígida y algo pesada, pero rigurosa; y el álgebra, con su conjunto de reglas flexibles y maleables y con su gran poder algorítmico.

Uno de los primeros triunfos de la matemática del siglo XVII se logrará con el acercamiento de ambos instrumentos.

LA MATEMÁTICA MODERNA

§ 26.—La geometría analítica

El siglo XVII fue de una fecundidad maravillosa para la ciencia; baste pensar que es el siglo de Galileo, de Descartes, de Huygens, de Newton, de Leibniz. Para la matemática, las condiciones adecuadas a tal fecundidad eran particularmente favorables. Por un lado, la geometría de los antiguos, olvidada en Occidente durante siglos, había renacido: las grandes obras griegas de Euclides, de Arquímedes, de Apolonio, de Diofanto, de Pappus, estaban ahora en versiones auténticas a disposición de los estudiosos. Por otra parte, el álgebra y la trigonometría habían adquirido cierta madurez que revelaba la autonomía de esos conocimientos, y al mismo tiempo ponía de manifiesto sus posibilidades como instrumentos algorítmicos.

Los resultados de tales condiciones favorables se harán sentir muy pronto, pues el siglo XVII verá ante todo una admirable conjunción del álgebra y de la geometría con el nacimiento de una nueva rama de la matemática: la geometría analítica, que produce en esa ciencia una verdadera revolución, acertadamente comparada con la revolución industrial, y que implícitamente muestra la armonía y unidad internas de la misma; en segundo lugar nace el análisis infinitesimal; ya como algoritmo del infinito, ya como indispensable instrumento para el

estudio de los fenómenos naturales; y si eso no fuera aún bastante, el siglo XVII asiste al advenimiento de la teoría de los números, del cálculo de probabilidades, de la geometría proyectiva.

El advenimiento de la geometría analítica va unido con el nombre del gran pensador francés René DESCARTES, aunque su obra en este campo está indisolublemente vinculada con la de sus predecesores y contemporáneos, como acontece en todas las grandes creaciones. Pero en DESCARTES esta vinculación es muy difícil de establecer, no sólo por su escasa propensión a reconocer los méritos ajenos, siendo casi imposible averiguar por sus escritos cuáles autores conoce, sino principalmente por el lugar y el papel que atribuye a la matemática en el campo de los conocimientos. Una de las características del pensamiento cartesiano es lo que podría llamarse su «afán cósmico», es decir, un anhelo de generalización y de absoluto que le hace perseguir la estructuración de una física general, capaz de explicar completamente todo lo que el universo contiene en la tierra y en los cielos, meta que cree alcanzar con sus *Principios* de 1644, aunque ese afán se nota desde 1619, fecha de sus primeros descubrimientos matemáticos.

De ahí que para DESCARTES la matemática no sea un fin en sí: la considera como modelo de la ciencia, a la que dictará sus preceptos lógicos; servirá por eso admirablemente, a manera de cobayo, para ensayar su método, pero no será más que eso: un método. El uso que DESCARTES hace de los términos «matemática» y «matemáticas» da cuenta de este hecho. Al referirse a sus estudios escolares, DESCARTES habla de «matemáticas», entre las que destaca el álgebra y la geometría, reconociendo en estas ramas cierta sencillez y prioridad respecto de las demás, aunque para él la geometría y el álgebra son tales que «la primera está siempre tan ligada a consideraciones sobre las figuras que no puede ejercitar el intelecto sin cansar mucho la imaginación,

y en la otra se está tan sujeto a ciertas reglas y ciertas letras, que en lugar de dar una ciencia que eduque la mente se convierte en un arte oscuro y confuso que la turba»; y de ahí que la vinculación que establecerá entre las dos ramas será precisamente la de tomar «lo mejor del análisis geométrico y del álgebra, corrigiendo los defectos del uno por el otro». Es que DESCARTES aspira a una ciencia única, a una ciencia integral, de la cual «las matemáticas» constituirán, como él dice, «la envoltura». Esta ciencia unitaria será la «matemática universal» —ahora en singular, restituyendo al vocablo su valor etimológico— que ha de explicar «todo aquello que pueda preguntarse acerca del orden y de la medida, no importando que las medidas deban buscarse en números, figuras, astros, sonidos o cualquier otro objeto».

Esta tendencia hacia una ciencia universal explica también el juicio, a veces hasta despectivo, que le merece a DESCARTES la matemática pura y el factor negativo que asigna al carácter formal de esta ciencia. «Son disciplinas —dice— muy abstractas que no parecen tener ningún uso», en cuyos problemas «acostumbran a entretenerse geómetras y calculistas ociosos». Al referirse a las cuestiones de la teoría de los números, las tilda de «muy inútiles», que a veces «pueden ser mejor resueltas por un hombre paciente que examine cuidadosamente la sucesión de los números». En cambio, DESCARTES ve una finalidad de la matemática en el método demostrativo y en sus aplicaciones.

Así, nos dirá en el *Discurso* de 1637: «Las matemáticas tienen invenciones sutilísimas que pueden servir tanto para satisfacer a los curiosos como para facilitar todas las artes y disminuir el trabajo humano», asombrándose más adelante «que siendo sus fundamentos tan sólidos y estables no se hubiera edificado sobre ellos nada más importante», mientras que de la práctica matemática que él ha experimentado no esperará otra cosa

«que acostumbrar mi mente a nutrirse de verdades y no satisfacerse con falsas razones».

Además, parece que mucho antes de la aparición del *Discurso* se había apartado de la matemática, pues en 1630 escribe: «En cuanto a los problemas, estoy tan cansado de las matemáticas y me ocupo tan poco de ellas, que ya no sabría tomarme el trabajo de resolverlos por mi cuenta.» Sin embargo, no obstante esta desestimación de DESCARTES hacia la matemática pura y el carácter formal que el álgebra introducía en ella; no obstante el desapego que DESCARTES le demuestra, su afán cósmico, su ansia de unificación lo lleva a realizar, quizá sin advertirlo, una revolución en aquella ciencia abstracta que él desvalorizó. Pues eso es su gran aporte a la matemática: la unificación del álgebra con la geometría.

El único escrito matemático publicado por DESCARTES es la *Géométrie,* tercero y último de los «ensayos» que figuran como apéndices de su célebre *Discurso del método*. En ese escrito, ya el primer capítulo del primer libro, cuyo título es «*Cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones de la geometría*», habla claramente de la unificación que realizará DESCARTES.

En efecto, una diferencia esencial entre los elementos geométricos (segmentos) y los elementos algebraicos (letras), que impedía su comparación es que mientras que con las letras pueden realizarse las operaciones aritméticas en número ilimitado obteniéndose nuevas combinaciones de letras, con los segmentos tales combinaciones quedan limitadas a las líneas, superficies y sólidos, es decir, a casos en que la «dimensión» del resultado no supera al número 3, pues en los demás casos ese resultado, por no poderse expresar mediante figuras geométricas, deja de ser inteligible.

Ahora bien, para eliminar tal limitación, DESCARTES utiliza un recurso técnico de una simplicidad asombrosa: el segmento unitario, es decir, un segmento arbi-

trario que, adoptado como unidad y operando convenientemente con él, permite que toda combinación de segmentos, cualquiera sea su «dimensión», se reduzca a un segmento único. En verdad esa unidad irá sobreentendida, y de hecho ni ella ni sus operaciones aparecerán, pues, y ésta es la segunda etapa del genial proceso de DESCARTES, bastará indicar con una letra a cada uno de los datos, e indicar el resultado con las respectivas combinaciones de las letras, de acuerdo con las letras del álgebra.

De ahí que a cada problema geométrico corresponderá una cierta relación entre letras, es decir, una ecuación, y el estudio o resolución de esta ecuación dará entonces lugar a la solución o análisis del problema geométrico. En esta correspondencia entre el álgebra y la geometría reside en definitiva la índole de las cuestiones que más tarde constituirá la «geometría analítica», y en ella está enlarvado el fundamental concepto de «coordenada», pues ni este nombre ni los ejes figuran en los escritos de DESCARTES.

De acuerdo con estos principios, DESCARTES, en el primer libro de su *Geometría*, expone la manera de realizar las operaciones aritméticas elementales y sus combinaciones con segmentos, terminando con un «Ejemplo tomado de Pappus», en el que con legítimo orgullo muestra la excelencia de su método al resolver en general problemas que los antiguos sólo habían podido resolver en casos particulares.

En el segundo libro estudia las curvas planas (algebraicas) mediante su método, destacándose entre los problemas que trata el de la determinación de las *normales* a las curvas planas, «problema que me atrevo a decir que es el más útil y general, no sólo que yo conozca, sino aun que yo haya anhelado jamás conocer en Geometría». Ha de destacarse el valor teórico de esta determinación de DESCARTES, pues ella resuelve, con recursos puramente algebraicos, una cuestión de análisis

infinitesimal; aunque no es en este valor teórico en que se funda la afirmación anterior, sino en la existencia de aplicaciones de ese problema a la física. Y en efecto, pocas páginas más allá, DESCARTES aplica el problema de la determinación de las normales a la construcción de lentes.

El tercer libro de la *Geometría* es, en verdad, un tratado de álgebra con las propiedades y transformaciones, entonces conocidas y algunas nuevas, de las ecuaciones algebraicas, y con la introducción de algunos perfeccionamientos en el simbolismo algebraico que reducen notablemente su diferencia con el actual.

Si en la *Geometría* de DESCARTES la aplicación del álgebra a la geometría aparece más bien como un método, en otro matemático francés del siglo XVII, Pierre FERMAT, esa aplicación se presenta más naturalmente como un recurso técnico. FERMAT, que no obstante sus ocupaciones oficiales, dedicó eficazmente su tiempo libre a la matemática, ha dejado vinculado su nombre a varias ramas de esta ciencia. Profundo conocedor de las obras clásicas griegas, es probable que su estudio de APOLONIO, de quien reconstruyó algunas obras perdidas, tuviera como consecuencia una memoria publicada en 1679 (aunque escrita antes de 1637), en la que aparecen los principios fundamentales del método de las coordenadas, si no en forma tan extensa como en DESCARTES, por lo menos en forma tan clara o más. Además, vinculándolas con esos problemas de aplicación del álgebra a la geometría, FERMAT trató también otras cuestiones de índole puramente algebraica (eliminación, racionalización, etc.).

El método de las coordenadas, fundamento de la ulterior geometría analítica, no tuvo difusión inmediata, por cuanto el escrito de DESCARTES no sólo figuraba como apéndice de una obra de carácter no exclusivamente matemático, sino que se había editado en Holanda y en francés; pero cuando a mediados de siglo apa-

reció la versión latina con comentarios, ese método se difundió y perfeccionó rápidamente. La aplicación del álgebra a la geometría tratada por DESCARTES lo fue a problemas de geometría plana (sus escasas extensiones al espacio no habían sido felices), pero ya hacia 1679 aparece la primera idea de las coordenadas en el espacio, idea que logró su desarrollo a mediados del siglo siguiente.

§ 27.—LA TEORÍA DE LOS NÚMEROS, LAS PROBABILIDADES Y LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

En los márgenes de una versión latina de la *Aritmética* de DIOFANTO publicada en el siglo XVII, así como en su correspondencia, nos encontramos con notas y resultados de las investigaciones que FERMAT realizó en el campo de los números naturales, investigaciones que han de considerarse como las inaugurales de una nueva rama de la matemática, hoy llamada «teoría de los números».

FERMAT tuvo plena conciencia de la importancia de esas investigaciones y de la novedad que comportaban. Así dice en sus comentarios: «La teoría de los números enteros, que es muy hermosa y sutil, no fue conocida hasta hoy...», y en otro lugar, «la aritmética tiene un dominio propio, la teoría de los números enteros que ha sido apenas esbozada por EUCLIDES y no cultivada suficientemente por los que le siguieron».

Se deben a FERMAT métodos y resultados importantes en este nuevo campo. Entre los resultados consignados en los márgenes de la *Aritmética* de DIOFANTO figura la proposición, hoy célebre, que afirma la imposibilidad de hallar cuatro números enteros positivos x, y, z, n (con n mayor que 2), tales que $x^n+y^n=z^n$. La celebridad de esta proposición reside en el hecho de que hoy, a tres siglos de FERMAT, no se ha logrado dar una demostra-

ción de esa comprobación ni comprobar su falsedad. FERMAT la enuncia con motivo del problema de descomponer un cuadrado en suma de dos cuadrados diciendo: «Por otro lado, es imposible descomponer un cubo en suma de dos cubos, o un bicuadrado en suma de dos bicuadrados, o en general cualquier potencia en suma de dos potencias de igual exponente, con excepción del cuadrado. He encontrado una demostración de esa proposición realmente maravillosa, pero el margen del libro es demasiado estrecho para contenerla.»

Actualmente se ha demostrado la proposición de FERMAT para extensas categorías de números, entre los que están los exponentes menores que 100, de manera que de ser falsa esa proposición, la descomposición de una potencia en suma de dos potencias de igual exponente debería verificarse para exponentes muy grandes, circunstancia que reduce aún más la posibilidad de encontrar por comprobación directa números que satisfagan a la igualdad anterior, y por tanto comprobar la falsedad de la proposición de FERMAT.

En este nuevo campo, como en otros de la ciencia, las investigaciones fueron provocadas y estimuladas por la costumbre de la época de dirigirse los matemáticos propuestas y cuestiones como desafío, a veces públicos.

De ahí que muchas contribuciones científicas de la época figuran en la correspondencia de los sabios, correspondencia que se tramitaba mediante intermediarios científicos, entre los cuales desarrollaron extraordinaria y eficaz actividad: en Francia el padre franciscano Marin MERSENNE, matemático él mismo, y en Inglaterra Henry OLDENBOURG, que fue secretario de la Royal Society.

En otra rama de la matemática, FERMAT fue de los iniciadores: en el llamado «cálculo de las probabilidades», cuyos primeros problemas, que se resuelven en el siglo XVII, se refieren a los juegos de azar. El primero de esos problemas es el «problema de los dados», nacido

de la siguiente observación, realizada por un jugador: si se tira un dado 4 veces consecutivas, la probabilidad de que aparezca un 6 es mayor que la del caso contrario; mientras que si se tiran 24 veces consecutivas dos dados simultáneamente, la probabilidad de que aparezca un doble 6 es menor que la del caso contrario. Ante esta circunstancia, que reputaba paradójica, el jugador consultó al célebre PASCAL, quien a su vez propuso la cuestión a FERMAT.

El otro problema es el «problema de las partidas», que consiste en averiguar cómo debe dividirse la apuesta entre dos jugadores de igual habilidad, si se suspende la partida antes de finalizar, conociendo el número de puntos que cada jugador había conquistado antes de suspenderse el juego.

En forma distinta, aunque con resultados concordantes, FERMAT y PASCAL resolvieron la cuestión. El nombre de Blaise PASCAL está ligado, como el de FERMAT, al de varios capítulos de la matemática. Con él se inicia el cálculo mecánico, pues a los dieciocho años inventa la primera máquina de sumar que se conoce, máquina que luego él perfeccionó y que más tarde LEIBNIZ mejoró. Aún muy joven, PASCAL contribuye al resurgimiento de la geometría pura, descubriendo un teorema que hoy lleva su nombre, pero que entonces fue llamado «el exagrama místico», aunque según confesión propia, ese teorema, que se refiere a las cónicas, y otras propiedades de esas curvas que aparecen en un escrito de 1640, le habían sido inspirados por Girard DESARGUES, a quien conoció en las reuniones científicas que se celebraban entonces en la celda del padre MERSENNE y que más tarde dieron nacimiento a la Academia de Ciencias de Francia.

DESARGUES fue un ingeniero militar y arquitecto, que no obstante su propia confesión de no interesarse en las investigaciones científicas sino en la medida «que puedan ofrecer al espíritu un medio de lograr algún conoci-

miento de las cosas, que puedan traducirse en actos para la conservación de la salud o en las aplicaciones y en las prácticas de algún arte», se le puede considerar como el primer cultor de una de las ramas de la matemática más alejadas de la realidad: la hoy llamada geometría proyectiva.

Preocupado por los problemas prácticos de la construcción de relojes de sol y del corte de piedras, se ocupó de perspectiva, sobre la que publicó dos breves trabajos, y de propiedades geométricas, dando sobre estos temas un curso de lecciones que, a pedido de sus discípulos, se publicaron en 1639. En este escrito y en algunos posteriores, DESARGUES expone conceptos e ideas originales que hoy forman parte de la geometría proyectiva.

Aunque apreciada por sus contemporáneos, la obra de DESARGUES no tuvo influencia alguna. El estilo oscuro con que se presentaba las nuevas ideas y su terminología, pero sobre todo el deslumbrante y atractivo efecto que en esa época ejercían los métodos analíticos (geometría analítica, análisis infinitesimal) sobre los matemáticos, hizo que las propiedades proyectivas de las figuras, cuyo estudio iniciara tan brillantemente DESARGUES, permanecieran como olvidadas. Deberá pasar más de un siglo para que ellas vuelvan a ser objeto de estudios sistemáticos y constituir entonces definitivamente una rama autónoma de la matemática.

§ 28.—EL ANÁLISIS INFINITESIMAL: LOS PRECURSORES

En nuestra concepción actual, la esencia del método infinitesimal reside en la idea de *paso al límite*, hija a su vez de la concepción de *sucesión indefinida*. Mientras que esta concepción está como enlarvada u oculta bajo expresiones aparentemente anodinas, como por ejemplo cuando se dice que a todo número sigue otro o cuando

se habla de magnitudes continuas, en los algoritmos modernos el paso al límite muestra al descubierto su carácter de operación independiente y suficientemente amplia como para constituir el núcleo de una rama autónoma e importante de la matemática. De ahí también que puedan encontrarse rastros de los métodos infinitesimales en todas las etapas de la evolución matemática.

Esos métodos asoman en las críticas de los eleatas y en algunas argumentaciones de los sofistas, y adquieren categoría y rigor científicos en la teoría de las proporciones y en el método de exhaución de EUDOXO, y sobre todo en manos de ARQUÍMEDES, que le permiten deducir rigurosamente resultados que hoy se obtienen con nuestros algoritmos infinitesimales. Este hecho sindica a ARQUÍMEDES como el precursor en la antigüedad de los métodos infinitesimales, y es indudable que la lectura de sus obras por los matemáticos del Renacimiento y modernos ha de haber influido poderosamente en el advenimiento de los nuevos métodos.

Nuevamente asoman consideraciones acerca del infinito con la introducción del cero como símbolo operatorio, así como en el cálculo de las primeras series convergentes que aparecen ya en ORESME.

Mas el mayor impulso dado a los métodos infinitesimales, que dio lugar al surgimiento del análisis infinitesimal, se debe a las exigencias de la astronomía y mecánica renacientes, que encontraron en esos métodos su instrumento indispensable; y al estudio de las curvas que el método de las coordenadas extendió y facilitó.

Es siguiendo las huellas de ARQUÍMEDES que Johannes KEPLER escribe su obra matemática más importante de 1615. Llevado por razones más de orden práctico que teórico, KEPLER se propuso comparar la capacidad de los toneles para vino entonces en uso, para lo cual estudia la cubatura (volumen) de numerosos cuerpos de rotación, obtenidos haciendo girar arcos de cónicas alrede-

dor de ejes paralelos a los ejes de las mismas. De esta manera describe y designa, generalmente con nombres derivados de frutas, más de 90 cuerpos.

Recurriendo directamente a expresiones de carácter «infinitesimal», admitiendo «como si» las figuras estuvieran compuestas de infinitas figuras infinitamente pequeñas de áreas o volúmenes conocidos, KEPLER evita el engorroso aunque riguroso método de exhaución de los antiguos y logra dar la cuadratura y cubatura de figuras conocidas y de otras nuevas, aunque no siempre con éxito. Al afirmar, además, que los toneles austriacos eran los más convenientes, pues con igual material encerraban un mayor volumen, KEPLER esboza las condiciones, ya indicadas por ORESME, de la variación de una cantidad en las proximidades de su máximo.

Concepciones semejantes a las de KEPLER, y también vinculadas con las investigaciones de ARQUÍMEDES, se encuentran en el jesuato Bonaventura CAVALIERI, que además de ocuparse de trigonometría y de aplicaciones de los logaritmos, a cuya difusión contribuyó notablemente en Italia, es autor de un método para calcular áreas y volúmenes fundado en los «indivisibles», método que ocupa un lugar intermedio entre las rigurosas concepciones de ARQUÍMEDES y los nuevos procedimientos infinitesimales que surgirán hacia la mitad del siglo. Sin definir el término, CAVALIERI adopta los indivisibles de la filosofía escolástica, es decir, los entes no homogéneos, sino de una dimensión menor, con el continuo del cual forman parte; así, los puntos son los indivisibles de las líneas, y las líneas lo son de las figuras planas. Pero para CAVALIERI los indivisibles no son sino una manera de expresarse y referirse a los elementos de dos figuras que él compara y que, mediante una cierta técnica algebraica, le permiten calcular sus áreas o volúmenes. La falta de rigor está suplida por la exactitud de los resultados; el hecho es que el lenguaje de los indivisibles se mantuvo durante casi medio siglo.

CAVALIERI pertenecía al círculo científico formado por los discípulos y amigos de GALILEO; de ese círculo se ocuparon de cuestiones infinitesimales Vincenzo VIVIANI, y en especial Evangelista TORRICELLI, cuyas importantes investigaciones matemáticas de carácter infinitesimal se pusieron en evidencia al publicarse recientemente sus obras completas.

Mayor influencia sobre el desarrollo de los métodos infinitesimales tuvo el estudio de una curva especial en el que intervinieron casi todos los matemáticos de la primera mitad del siglo XVII. Se trata de la cicloide (el nombre es de GALILEO), es decir, la curva descrita por un punto de una circunferencia que rueda, sin resbalar, sobre una recta, y de cuyas propiedades se ocuparon GALILEO, MERSENNE, TORRICELLI, VIVIANI, ROBERVAL, DESCARTES, PASCAL, FERMAT, HUYGENS, WREN, WALLIS, a veces a través de polémicas, desafíos y controversias.

Giles Personne de ROBERVAL se ocupó de numerosas cuestiones vinculadas con los métodos infinitesimales. Se le debe un método cinemático para construir las tangentes a todas las curvas planas conocidas en su época, a las que él añadió alguna otra, ocupándose, además, en el cálculo de áreas y volúmenes, así como en la determinación de centros de gravedad y de longitudes de arcos de curva, utilizando una concepción semejante a la de los indivisibles, aunque algo más próxima a la de los «infinitamente pequeños».

Con métodos semejantes estudia PASCAL numerosas propiedades de la cicloide, que él llamaba «roulette», y que constituyeron el tema de un desafío que lanzó públicamente en 1658 a todos los matemáticos de la época.

Las contribuciones de FERMAT al análisis infinitesimal alcanzan a todas las ramas del mismo y revelan su gran habilidad algorítmica. FERMAT traduce algebraicamente la idea, ya enunciada por ORESME y por KEPLER, acerca de la anulación de la variación en las proximidades de los máximos y mínimos, aplicando la idea

a la determinación de las tangentes a las curvas. Explotando con habilidad la suma de términos en progresión geométrica, calculó el área encerrada por varias curvas. También calculó longitudes de arcos de curva reduciendo en algunos casos este problema al anterior, lo que mostraba la analogía algebraica de ambos problemas.

Mientras el estudio de estas cuestiones geométricas: tangentes, longitudes de arcos, áreas, volúmenes, centros de gravedad, iban proporcionando los elementos para los futuros algoritmos del cálculo diferencial y del cálculo integral, hacían su aparición otros algoritmos infinitos.

Con la pretensión de demostrar la cuadratura del círculo, el jesuíta belga Gregorius SAINT VINCENT publica una voluminosa obra en la que aparece la suma de la serie geométrica convergente, ya utilizada por FERMAT, y otras nociones infinitesimales interesantes. Entre los que se ocuparon en refutar sus pretendidas demostraciones, figura uno de los más grandes sabios del siglo XVII: Christiaan HUYGENS que, además de su labor como físico y astrónomo, ha realizado diversas investigaciones matemáticas, algunas en conexión con sus trabajos físicos y otras independientes. Se le debe el primer tratado sobre el cálculo de probabilidades, fundado sobre la correspondencia entre FERMAT y PASCAL; y en conexión con sus investigaciones mecánicas enriqueció el estudio de las curvas con la llamada «teoría de las evolutas», teoría que figura en su célebre *Horologium oscillatorium* de 1673, y que abre un nuevo capítulo de la geometría diferencial: de la curvatura de las curvas planas.

Las series fueron introducidas sistemáticamente en el análisis por John WALLIS, uno de los más originales matemáticos de su época. Se ocupó de álgebra, de la teoría de las paralelas, y de las cónicas, que por primera vez consideró no ya como secciones de un cono, sino

como curvas cuyas ecuaciones en coordenadas cartesianas son de segundo grado. Su obra más importante es la *Arithmetica infinitorum* de 1655, en la que aparece el actual símbolo de infinito y el uso e interpretación de las potencias de exponente no natural, es decir, no entero positivo. Calculó el área encerrada por una curva cuya ecuación era una potencia de exponente cualquiera, extendiendo ese resultado a toda suma o serie de potencias. Al aplicar este método a un caso particular, y en forma bastante curiosa, llegó al importante resultado de desarrollar el número π en un producto infinito más simple que el que había dado VIÈTE. Vinculado a ese resultado, el primer presidente de la Royal Society, William (Lord) BROUNCKER, encontró, no se sabe por qué medios, un notable desarrollo de π en fracción continua infinita.

Otra consecuencia importante del método de WALLIS fue el establecimiento de la importante «serie logarítmica», y con ella de la determinación del área de un sector de hipérbola equilátera, que hasta entonces no había podido ser calculada. En este sentido el paso decisivo fue dado por Nicolaus MERCATOR con su *Logarithmotechnia* de 1668.

Con el nombre de Isaac BARROW cerramos la lista de los precursores y predecesores de los dos grandes fundadores del análisis infinitesimal: NEWTON y LEIBNIZ. La importancia de BARROW en el surgimiento de los nuevos métodos es indiscutible; por un lado se le debe un método para la determinación de las tangentes a las curvas planas, que no difiere del actual sino en la notación y que, en definitiva, involucra el importante concepto de *derivada;* por el otro lado, BARROW fue el maestro de NEWTON, a quien en 1669 cedía su cátedra de Cambridge para dedicarse a la teología; las frecuentes discusiones entre maestro y discípulo, la colaboración de ambos (NEWTON revisó y corrigió una de las

ediciones de una obra de BARROW), son hechos que contribuyen a asignar gran importancia a la influencia de BARROW en las concepciones futuras.

§ 29.—EL ANÁLISIS INFINITESIMAL: LOS FUNDADORES

La obra de los precursores y predecesores de NEWTON y de LEIBNIZ prepara y allana el camino para que éstos logren, con su propia labor, dar nacimiento al análisis infinitesimal como rama propia y autónoma de la matemática. Aquellos precursores y predecesores habían tratado y resuelto numerosos problemas relativos a las tres ramas que luego constituirán la nueva disciplina: cálculo diferencial, cálculo integral, algoritmos infinitos. De cálculo diferencial se habían ocupado al estudiar la determinación de las rectas tangentes, curvatura y problemas de máximo y mínimo; de cálculo integral se habían ocupado en las numerosas determinaciones de áreas, volúmenes, longitudes de arcos y centros de gravedad; y en cuanto a los algoritmos infinitos, se habían ocupado de series, de productos infinitos y de fracciones continuas infinitas.

Pero, en general, faltó en ellos una noción que mostrara la unificación de todos esos métodos, tal como la proporcionará más adelante la noción de *límite;* faltó en ellos todo carácter riguroso, pues sus métodos carecían de toda demostración, entendida en el sentido lógico con que aparecía en los métodos de los antiguos. Esos métodos rigurosos subyacían bajo la mole de casos particulares resueltos con procedimientos también particulares o cuya generalidad no se demostraba, y en los que las consideraciones geométricas estaban constantemente mezcladas con desarrollos algebraicos. Esta etapa empírica de la evolución del análisis infinitesimal será superada en parte por la obra de NEWTON y de LEIBNIZ, aunque en verdad hasta el siglo XIX no surgirá ese aná-

lisis estructurado con el mismo rigor lógico con que los antiguos edificaron su geometría.

Por eso, en el desarrollo de los métodos infinitesimales, NEWTON y LEIBNIZ representan una etapa, sin duda alguna muy importante, de un largo proceso continuo, nacido al amparo y con el auxilio de las nuevas concepciones surgidas en la matemática moderna, que prosiguió hasta mediados del siglo pasado y, con nuevas orientaciones, todavía en la actualidad.

La labor matemática de Isaac NEWTON, íntimamente vinculada con sus investigaciones de filosofía natural, no se limita a las cuestiones infinitesimales, sino que abarca amplias zonas del álgebra y de la geometría. Así, en sus célebres *Principia* de 1687, dedica un par de secciones del primer libro a estudiar propiedades, algunas nuevas, de las cónicas en forma geométrica. También es de índole geométrica su *Enumeratio linearum tertii ordinis,* terminado en 1695, pero aparecido en 1704. En este libro se inicia el estudio de las curvas algebraicas, es decir, de las curvas cuya ecuación en coordenadas cartesianas es de naturaleza algebraica, y en él NEWTON, después de haber demostrado algunas propiedades generales de esas curvas, estudia en particular las cúbicas (curvas cuya ecuación es de tercer grado), dando su generación, su clasificación y su aplicación en la resolución de ecuaciones. En gran parte está también dedicado a la resolución de ecuaciones su *Arithmetica universalis* (aparecida en 1707, pero que resume lecciones dictadas entre 1673 y 1683) que, no obstante su título, es en verdad un tratado de álgebra que generaliza y mejora los conocimientos de la época relativos a la resolución algebraica de problemas geométricos, a la eliminación algebraica, y a la teoría general de las ecuaciones.

Entre las obras que tratan de métodos infinitesimales, figura *De Analysis per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* que estaba lista en 1669, pero que no

se publicó hasta 1711, aunque su contenido era conocido antes de esa fecha mediante la correspondencia científica. Ese escrito, como indica el título, trata de series, aunque en él el algoritmo no es estudiado en sí sino como un recurso para calcular longitudes de curvas y áreas, mediante el procedimiento de desarrollar en serie la ordenada. En *De Analysis*, entre otros desarrollos en serie nuevos e importantes, aparece el teorema general del binomio, que es la generalización para exponentes cualesquiera de la fórmula bien conocida del desarrollo de la potencia de un binomio para exponentes enteros y positivos, generalización a la que, con propiedad histórica, debe llamarse «Binomio de Newton». Como dijimos, en este tratado las series no son estudiadas como algoritmo autónomo, sino como recurso para determinar cuadraturas aplicando la regla general de los exponentes dada por WALLIS, pero lo novedoso de NEWTON es que partiendo del resultado obtenido y aplicándole el método de las tangentes de BARROW, vuelve a encontrar la función de la que partió, con lo que queda desatado el nudo gordiano del nuevo análisis; es decir, que los problemas de la tangente y de la cuadratura son inversos uno de otro.

Pero la contribución más original e importante de NEWTON a los métodos infinitesimales es su ««método de las fluxiones», que constituyó el tema de un tratado escrito en 1671, pero que no fue publicado, traducido, hasta 1736. Del carácter general del método ya da cuenta NEWTON en una carta de 1672, al decir «que puede aplicarse no sólo al trazado de tangentes a cualquier curva, sea geométrica o mecánica..., sino también para resolver cualquier clase de problemas sobre curvatura, áreas, longitudes, centros de gravedad, etc.», agregando que ha «entrelazado ese método con aquel otro método que consiste en trabajar con las ecuaciones reduciéndolas a series infinitas».

En efecto, el método de las fluxiones con su esencia

y notación propias, no es sino un método para tratar los problemas del actual análisis infinitesimal. Es un método de naturaleza geométrico-mecánica, pues supone que todas las magnitudes geométricas son engendradas por movimientos de velocidades diferentes, mientras el tiempo «fluye continua y uniformemente»; de ahí que el tiempo, que actúa como telón de fondo, no aparezca explícitamente, sino implícitamente en las velocidades, en las velocidades de las velocidades, etc. Las magnitudes engendradas son las «fluentes», sus velocidades son las «fluxiones», mientras que NEWTON denomina «momento» al producto del incremento del tiempo por la respectiva fluxión. Para las fluxiones sucesivas, NEWTON introdujo una notación característica, que aún se usa en mecánica, que consiste en colocar puntos encima de la letra que indica la correspondiente fluente. Es fácil advertir que las fluxiones y momentos de NEWTON no son sino las «derivadas» y «diferenciales» actuales.

Con su método de las fluxiones, NEWTON resuelve una serie de problemas y aplicaciones geométricas que corresponden a nuestro cálculo diferencial, cálculo integral y a nuestras ecuaciones diferenciales ordinarias y con derivadas parciales.

También asoma en NEWTON, aunque expresada en forma oscura, la importante noción de *límite* al introducir en un tratado de 1704 la expresión de «razón de los incrementos evanescentes», introducción que obedecía al intento de levantar ciertas objeciones de orden técnico que su método suscitaba.

Mientras en Inglaterra, por obra especialmente de NEWTON, el análisis infinitesimal lograba nuevos resultados y adquiría las primeras notas que le conferían unidad y autonomía, en el continente y por obra de Gottfried Wilhelm LEIBNIZ tal unidad y autonomía se acentuaban. Si la obra matemática de NEWTON fue la de un «filósofo natural», la de LEIBNIZ fue la de un «filósofo y algorítmico». Su preocupación por la claridad de

los conceptos y el aspecto formal de la matemática, le permitieron, entre otros descubrimientos, crear el simbolismo adecuado para el nuevo algoritmo.

Además de sus contribuciones especiales al análisis infinitesimal, la labor matemática de LEIBNIZ se ha extendido a la teoría de los números, al cálculo mecánico (perfeccionó la máquina de calcular de PASCAL), al álgebra, a la combinatoria, y puede considerársele iniciador de varias ramas de la matemática: el cálculo geométrico, la teoría de los determinantes, la lógica matemática, la topología... Por lo demás, en la multiforme labor de LEIBNIZ se cuenta la de haber estimulado los estudios científicos promoviendo la fundación de periódicos científicos, academias, etc.

Las consideraciones infinitesimales de LEIBNIZ, que ya se encuentran en manuscritos de 1673, parten de la consideración de un triángulo especial (el «triángulo característico», como él lo llama), que ya figuraba en BARROW, pero que LEIBNIZ dice que toma de PASCAL. Mediante consideraciones sobre este triángulo y sus semejantes, reconoció que el problema de la tangente y el de la cuadratura son inversos y encontró relaciones entre las sumas de los elementos geométricos que preludian nuestras fórmulas de cálculo integral.

Aunque ya desde 1676 está en posesión de las reglas y fórmulas más simples del cálculo infinitesimal, la primera publicación de LEIBNIZ sobre el tema es de 1684, y se refiere al cálculo diferencial. Es una memoria muy breve en la que aparecen definidas las diferenciales en forma actual y las reglas comunes de diferenciación de las expresiones racionales e irracionales.

En 1686 aparecen los primeros escritos de LEIBNIZ relativos al cálculo integral, y por primera vez aparece publicado en ese año nuestro actual signo «integral». Posteriormente, aparecieron otras cuestiones originales, como el teorema de las diferenciales sucesivas de un producto que hoy lleva su nombre, interviniendo por lo

demás LEIBNIZ en todos los problemas de índole geométrico-mecánica que interesaban a los matemáticos de la época.

La circunstancia, que hoy nos parece natural y lógica, de que en la segunda mitad del siglo XVII los tiempos estaban ya maduros para que naciera el análisis infinitesimal, y el hecho de que éste naciera por obra de dos sabios insignes, en forma independiente y casi contemporánea, provocó entonces una cuestión de prioridad que degeneró en una larga y lamentable polémica iniciada por los autores principales y proseguida durante todo el siglo XVIII entre los matemáticos ingleses y los continentales.

Tal controversia tuvo como resultado un aislamiento de cada bando y la consiguiente falta de cooperación científica. Como en definitiva los métodos eran los mismos, diferenciándose únicamente en la notación, resultaba que cada bando, al ceñirse exclusivamente a su propia notación, impedía en muchos casos que sus progresos fueran conocidos y asimilados por los del bando contrario. Pero en esta situación eran los ingleses los que llevaban las de perder, dada la evidente ventaja de la notación de LEIBNIZ frente a la de NEWTON, nacida de una mente más física que algorítmica.

Y cuando los ingleses, para terminar con tal estado de cosas, que representaba para ellos una situación de atraso frente a los progresos continentales, crean la «Analytical Society» en 1813, puede decirse que la célebre, aunque malhadada polémica, terminó.

§ 30.—EL ANÁLISIS INFINITESIMAL: LOS CONTINUADORES

Los métodos infinitesimales de NEWTON y de LEIBNIZ no se hicieron conocer hasta las últimas décadas del siglo XVII, pero la difusión de las nuevas ideas fue muy lenta. El carácter novedoso de las mismas, las notacio-

nes inusitadas y diferentes, su publicación en memorias aisladas y fragmentarias; todo contribuyó a que los nuevos métodos no se extendieran rápidamente, de manera que a fines del siglo XVII, además de sus autores, eran muy pocos los matemáticos que estaban enterados de esos métodos, y sobre todo muy pocos los que estaban en condiciones de aplicarlos. Entre estos últimos figuran dos BERNOULLI, nombre que campeará en la matemática en un lapso de casi dos siglos.

La familia Bernoulli, de origen holandés, pero residente en Suiza, proporcionó durante los siglos XVII, XVIII y XIX más de una decena de matemáticos, de los cuales tres muy importantes: JACOB (I) (hay dos Jacob); su hermano JOHANN (I) (hay tres Johann), y un hijo de éste, DANIEL (I) (hay dos Daniel). Además, vinculado con los Bernoulli, se presenta el más grande de los matemáticos del siglo XVIII: Leonhard EULER.

La obra matemática de JACOB se reparte por igual entre los nuevos métodos infinitesimales y el cálculo de las probabilidades. En el primer campo se ocupó de series y de las propiedades de numerosas curvas, en una de las cuales (la espiral logarítmica) descubrió que se reproduce en varias otras curvas derivadas de ella, hecho que lo llevó a imitar el gesto de ARQUÍMEDES, pidiendo que en su tumba se grabase esa curva con la leyenda *Eadem mutata resurgo.*

Se le debe la primera resolución con demostración del problema (propuesto por LEIBNIZ) de la curva tal, que un punto sobre ella cae con movimiento uniforme respecto de la vertical (curva isócrona). En enconada emulación científica con su hermano JOHANN, fueron propuestos y resueltos numerosos problemas de aplicación de los métodos infinitesimales a la geometría y a la mecánica. Así JOHANN propuso en 1696 el problema de la curva de tiempo mínimo (braquistócrona) que fue resuelto, entre otros, por JACOB, mientras que éste propu-

so la ecuación diferencial que hoy lleva el nombre de Bernoulli y que fue resuelta por JOHANN.

El problema de las trayectorias isogonales y en particular ortogonales (familia de curvas que cortan a las curvas de otra familia bajo ángulo constante) fue propuesto en 1694 por JOHANN, pero al principio pasó inadvertido y fue reiterado por LEIBNIZ en 1716 «para tantear el pulso a los matemáticos ingleses».

El problema de los isoperímetros (curvas o arcos de igual longitud que cumplen ciertas propiedades de máximo o mínimo), que fue propuesto por JACOB y estudiado por ambos hermanos, provocó una agria disputa entre ellos que continuó, aun después de la muerte de JACOB, entre JOHANN y otros matemáticos.

Muchos de estos problemas son los que darán origen a la importante disciplina que hoy llamamos «Cálculo de variaciones».

La obra más importante de JACOB es su *Ars Conjectandi*, aparecida en 1713, en la que el cálculo de las probabilidades adquiere autonomía científica. Se compone de cuatro partes: la primera reproduce con valiosos comentarios la obra de HUYGENS sobre el tema; la segunda es un tratado de combinatoria y en ella aparece la expresión que da la suma de las potencias de igual exponente de los primeros números naturales, en la que figuran ciertos coeficientes constantes, hoy denominados «números de Bernoulli»; la tercera parte se refiere a los juegos de azar, y la cuarta, incompleta, aplica «las doctrinas precedentes a cuestiones civiles, morales y económicas», y en ella aparece la hoy llamada «ley de los grandes números».

En cuanto a JOHANN, a su labor de físico matemático ha de agregarse su contribución a la matemática, en gran parte conexa, o mejor en oposición, a la de su hermano JACOB y hasta a la de su hijo DANIEL. Esa contribución se refiere especialmente a la teoría de las series, al cálculo integral y a la integración de ecuaciones

diferenciales. Un original e interesante método de integración por series, expuesto en 1694, da nacimiento a una serie (a veces designada hoy con el nombre de «serie de Bernoulli») que no es sino un caso particular de la importantísima «serie de Taylor».

Con el nombre de JOHANN BERNOULLI está íntimamente vinculado al del marqués de L'HÔPITAL, único francés que durante mucho tiempo estuvo en condiciones de resolver los problemas que LEIBNIZ y los BERNOULLI proponían a los geómetras de la época. L'HÔPITAL es autor del primer tratado sistemático de cálculo diferencial aparecido anónimo en 1696 y con nombre de autor desde 1716, en cuyo título aparecen los «infinitamente pequeños». El hallazgo reciente de los apuntes de las lecciones de BERNOULLI y, sobre todo, la correspondencia de éste con el marqués, muestran que el libro del marqués no contiene sino las lecciones que, a pedido de éste, BERNOULLI le impartiera, y las enseñanzas que por correspondencia siguió remitiéndole. Las lecciones de BERNOULLI comprenden también el cálculo integral, que el marqués no publicó, pues se había enterado de que LEIBNIZ pensaba hacerlo directamente. Esas lecciones de cálculo integral, impartidas al marqués durante los años 1691-92, de publicarse, hubieran constituido a su vez el primer tratado sistemático de esa parte del análisis.

Agreguemos que en su libro de 1696 aparece la hoy comúnmente llamada «regla de L'Hôpital» para el cálculo de límites indeterminados, regla cuya paternidad reivindicó BERNOULLI después de la muerte del marqués.

En Italia se ocuparon de los nuevos métodos infinitesimales Jacopo RICCATI, que dejó su nombre vinculado a una ecuación diferencial, y el conde de FAGNANO, más original, cuyas importantes contribuciones sobre las rectificaciones de arcos de elipse y de hipérbola pueden considerarse como el punto de partida de las hoy llamadas «funciones elípticas».

En Alemania el único matemático de esta época, con excepción de LEIBNIZ, que se ocupó de los nuevos métodos, sin mayor éxito, fue Ehrenfried Walter von TSCHIRNHAUSEN, más conocido por su método de transformación de ecuaciones con el cual lograba resolver las ecuaciones hasta de cuarto grado. Parece que LEIBNIZ había previsto la imposibilidad de resolver ecuaciones de grado superior al cuarto por ese método, aunque parece que también él, como otros matemáticos de los siglos XVII y XVIII, se ilusionó en resolver algebraicamente la ecuación de quinto grado. «Nadie hasta hoy dio una fórmula general para la solución de las ecuaciones de grado superior —dice—; creo haber encontrado un método adecuado y puedo probarlo, pero aún no he podido vencer al fastidio provocado por los tediosos cálculos numéricos.»

En Inglaterra, después de las fluxiones, el acontecimiento matemático más notable es la crítica que el filósofo George BERKELEY dirige a los nuevos métodos en su *The Analyst* de 1734, o «discurso dirigido a un matemático infiel, donde se examina si el objeto, principios e inferencias del análisis moderno son concebidos más claramente o son deducidos con mayor evidencia que los misterios de la religión y los asuntos de la fe».

El «matemático infiel» era el célebre astrónomo Edmund HALLEY, que también se ocupó de matemática; sin duda un libre pensador y en cierto sentido activo; de ahí la «infidelidad» de que lo acusa BERKELEY, pues por el hecho de ser reputado un gran matemático y por ello uno de los grandes maestros de la razón, utilizaba indebidamente su autoridad opinando y decidiendo sobre cuestiones ajenas a su incumbencia y sobre las cuales no tenía derecho alguno. Hábil polemista, BERKELEY se dirige entonces hacia los objetos mismos de la ciencia que HALLEY profesa, mostrando triunfalmente que aquellos que se quejan sin razón de la incomprensibilidad científica de la religión, aceptan una ciencia que

en su raíz misma es incomprensible y cuyas conclusiones se apoyan en raciocinios que la lógica no acepta.

Y si bien la finalidad de BERKELEY no es tanto criticar los nuevos métodos como vindicar los misterios de la fe, la crítica contra aquellos métodos es pertinente, aguda y decisiva. En efecto, los nuevos métodos, tanto en la forma dada por NEWTON como en la de los matemáticos continentales, estaban envueltos en principios oscuros, vagos y contradictorios, y por tanto expuestos a la crítica incisiva que le dirigiera BERKELEY. Esa crítica era inobjetable desde el punto de vista técnico; no lo fue, en cambio, la teoría de «compensación de errores», en la que se embarcó BERKELEY impresionado sin duda por el hecho aparentemente paradójico de que fundándose sobre principios y demostraciones tan deleznables, los nuevos métodos lograran resultados exactos como lo comprobaba el extraordinario triunfo de la mecánica newtoniana. Hay que agregar que en esa teoría de la compensación de errores, BERKELEY no se encuentra solo, pues más tarde fue adoptada por matemáticos y hasta por grandes matemáticos.

La influencia de la crítica de BERKELEY se hizo sentir en forma más o menos visible en todos los matemáticos ingleses contemporáneos o inmediatos sucesores de NEWTON.

De ellos, el más antiguo es Abraham DE MOIVRE, de origen francés, pero residente en Londres desde la revocación del edicto de Nantes. Se ocupó de distintas cuestiones matemáticas, introdujo el estudio de las llamadas «series recurrentes» y se le debe una importante fórmula, conocida hoy por su nombre, que, si bien él la expuso en forma trigonométrica, forma actualmente parte de la teoría de los números complejos.

DE MOIVRE completó también estudios algebraicos realizados por un matemático brillante, Roger COTES, desgraciadamente muerto muy joven. Contemporáneo de los anteriores es Brook TAYLOR, que se ocupó de físi-

ca y de matemática, y que en una obra de 1715, en la que hace uso sistemático de las hoy llamadas «diferencias finitas», da la importante serie que hoy lleva su nombre. También se ocupó de diferencias finitas James STIRLING, que dejó su nombre vinculado a una fórmula para el cálculo aproximado de *n!* (producto de los números naturales sucesivos desde 1 hasta *n*) cuando *n* es muy grande.

De geometría, de álgebra y de análisis infinitesimal, así como de física y de astronomía, se ocupó el último matemático inglés de este período, quizá el más importante de él: Colin MACLAURIN, que para escapar a las críticas de BERKELEY volvió a los clásicos métodos de los geómetras antiguos, con lo que si bien logró hacer más rigurosas sus demostraciones, contribuyó indirectamente a aumentar el aislamiento de los matemáticos ingleses frente a los continentales.

De su *Treatise on Fluxions* (en dos volúmenes, de 1737 y 1742), que es un tratado sistemático del cálculo fluxional con sus aplicaciones geométricas y mecánicas, declaró LAGRANGE que era «una obra de geometría que puede compararse a todo lo que ARQUÍMEDES nos legó de más hermoso y más ingenioso».

en forma más o menos [illegible] matemáticos ingleses contemporáneos o inmediatos sucesores de NEWTON.

De ellos, el más antiguo es Abraham DE MOIVRE, de origen francés, pero residente en Londres desde la revocación del edicto de Nantes. Se ocupó de distintas cuestiones matemáticas, introdujo el estudio de las llamadas series recurrentes y se le debe una importante fórmula, conocida hoy por su nombre, que, si bien él la expresó en forma trigonométrica, forma actualmente parte de la teoría de los números complejos.

De MOIVRE conoció también estudios algebraicos realizados por un matemático brillante, Roger COTES, desgraciadamente muerto muy joven. Contemporáneo de los anteriores es Brook TAYLOR, que se ocupó de físi-

LA MATEMÁTICA ILUMINISTA

§ 31.—EULER Y LA SISTEMATIZACIÓN DEL ANÁLISIS

Si con una sola palabra se quisiera caracterizar a la matemática del siglo de las luces, diríamos que el siglo XVIII fue el siglo del algoritmo, el siglo en el que el análisis, tanto el algebraico como el infinitesimal, adquiere vida propia y tiñe a toda la matemática de un marcado carácter formal, aunque no riguroso. En cierto sentido, el análisis se independiza de la geometría y de la ciencia natural; mientras que en el siglo anterior, la geometría analítica y los métodos infinitesimales habían servido de instrumentos analíticos para la solución de problemas geométricos o para la investigación de las leyes naturales, en el siglo XVIII el análisis, aun prosiguiendo esos fines, se estudia además por sí mismo, y hasta la geometría y los fenómenos naturales llegan a servirle de pretextos para nuevos desarrollos y para nuevos problemas analíticos.

Este carácter puramente algorítmico de la matemática vuelve a perderse a fines de siglo, cuando la geometría y la física penetran nuevamente en el campo de la matemática, aunque con nuevos rasgos: la geometría ha adquirido la jerarquía de geometría pura y la física se ha convertido en física matemática. La figura representativa del período algorítmico es Leonhard EULER, mientras que en la geometría pura y en la física ma-

temática son casi exclusivamente los matemáticos franceses los que mantienen el cetro en el período comprendido entre EULER y GAUSS.

En este siglo de la razón, también en la matemática la razón muestra una confianza excesiva. A su disposición los símbolos algebraicos y el algoritmo infinitesimal, no duda de que todo problema analítico puede resolverse; que toda ecuación algebraica tenga solución, que toda ecuación diferencial puede integrarse y que toda serie puede sumarse.

A esta confianza en el poder del símbolo, confianza que en definitiva resultó beneficiosa, pues los excesos fueron luego corregidos, agrega EULER una capacidad de calculista pocas veces igualada y una fecundidad prodigiosa. La publicación de la enorme mole de sus escritos, en parte aún inéditos, fue emprendida hace unos cuarenta años, habiéndose publicado hasta la fecha 26 de los 69 volúmenes proyectados.

Formado en el ambiente de los Bernoulli, EULER, que nunca fue profesor, desarrolló su intensa actividad científica en su mayor parte gracias a la protección de las cortes de San Petersburgo y de Berlín, a cuyas publicaciones académicas dio vida durante muchos años casi por sí solo. Esa actividad no decayó un solo instante; al contrario, la mitad de sus escritos son frutos de los últimos años de su vida, cuando totalmente ciego dictaba sus trabajos. Esa actividad se ha manifestado en todos los campos de la ciencia matemática y de la física. Sus memorias, más de un millar, tratan de aritmética y de la teoría de los números, de álgebra, de probabilidades, de cálculo infinitesimal, de geometría, de mecánica racional y aplicada, de astronomía, de física, de geografía matemática y algunas también de filosofía.

En la teoría de los números, es probable que su máxima contribución se refiera a los números primos: la actual teoría analítica de los números primos puede de-

cirse que se inicia con una notable identidad encontrada por EULER que vincula los números primos con la serie de las potencias de los recíprocos. Además, en una carta a Christian GOLDBACH reconoció, sin demostrarlo, la verdad de la «conjetura de Goldbach»: todo número par es suma de dos números primos, teorema que aún aguarda demostración.

En álgebra, dio métodos originales de eliminación y de descomposición en fracciones parciales simples. En especial se ocupó de la teoría de las ecuaciones. Con la esperanza de dar un método general para resolver ecuaciones de cualquier grado, halló un nuevo método para resolver la ecuación de cuarto grado, distinto al de FERRARI; método incluido en un procedimiento general válido para las ecuaciones de segundo, de tercero y de cuarto grado, pero nada más.

Pero es en el análisis infinitesimal donde aparecen las contribuciones más originales de EULER. Por lo pronto, se le deben los primeros tratados sistemáticos de esa disciplina: *Introductio in analysis infinitorum*, 1748; *Institutiones calculi differentialis*, 1755; *Institutiones calculi integralis*, 1768-1770, y *Methodus inveniendi lineas curvae maximi minimive proprietate gaudentes*, 1744.

En su *Introductio*, EULER usa el concepto de función en la forma en que se mantuvo durante mucho tiempo: «función de x es toda expresión analítica de una variable obtenida mediante una combinación finita o infinita de símbolos algebraicos o trascendentes». (Esta última distinción le pertenece.) A veces también se refirió a la función como toda relación entre x e y tal que se represente en el plano mediante una curva trazada «a mano libre», es decir, una curva continua dentro de la acepción vulgar de la continuidad.

En conexión con las funciones trascendentes aparece una de las más notables contribuciones de EULER al análisis: los logaritmos como exponentes y su vincu-

lación con los números imaginarios y las funciones circulares. Esta vinculación, dada por las hoy llamadas «fórmulas de Euler», es en verdad la conclusión de un largo pleito iniciado con LEIBNIZ acerca de los logaritmos de los números negativos, y al cual EULER puso fin, aunque sus explicaciones no fueron entonces entendidas y durante todo el siglo continuaron las discusiones. El segundo tomo de la *Introductio* es un tratado de geometría analítica plana y del espacio en la forma general actual.

En *Institutiones calculi differentialis*, EULER estudia las diferencias finitas, el cálculo diferencial y las series. Su concepto de cociente diferencial no es riguroso, y en el tratamiento de las series maneja con igual desenvoltura series convergentes y divergentes, sin hacer distinción entre ellas, lo que no impide, claro es, que en este tratado también aparezcan contribuciones originales.

Sus *Institutiones calculi integralis*, libro escrito cuando ya estaba ciego, comprenden tres volúmenes (un cuarto póstumo contiene una selección de memorias) que tratan, con numerosas innovaciones y contribuciones originales, los temas comunes del cálculo integral actual, desde las cuadraturas hasta la integración de ecuaciones diferenciales ordinarias y con derivadas parciales, y nociones de cálculo de las variaciones. A este último cálculo, tal como se conocía en su época, EULER dedicó el tratado *Methodus inveniendi...*

El gran favor que los métodos analíticos gozaron, frente a los geométricos durante todo el siglo XVIII, se puso de manifiesto en el hecho de que casi todos los contemporáneos de EULER se ocuparon preferentemente de análisis.

En cierto sentido, es una excepción Alexis Claude CLAIRAUT, que siendo aún adolescente se ocupó de las curvas en el espacio, y cuya obra más importante de 1743 se refiere a la forma de la tierra, estableciendo en

ella las condiciones matemáticas para el equilibrio de los fluidos y sentando los fundamentos de la futura teoría del potencial. Esa obra se basaba en otra de MACLAURIN sobre la atracción de los elipsoides de revolución, y los métodos exclusivamente geométricos de MACLAURIN indujeron a CLAIRAUT a utilizar igual recurso en sus demostraciones. Pero MACLAURIN y CLAIRAUT figuran entre los últimos matemáticos que resuelven los problemas mecánicos y astronómicos *more geometrico*. CLAIRAUT se ocupó de uno de los problemas célebres de la época: el «problema de los tres cuerpos», del cual se ocupó también Jean-Le Rond D'ALEMBERT, en cierto modo rival de su connacional CLAIRAUT. D'ALEMBERT fue el redactor de numerosos artículos matemáticos y acerca de cuestiones metodológicas y de los fundamentos de esta ciencia, aparecidos en la gran *Encyclopédie* de 1751, en la que, como es sabido, escribió además el «Discurso preliminar». Una contribución importante de D'ALEMBERT fue la solución del «problema de las cuerdas vibrantes», problema del cual se ocuparon otros matemáticos de la época, en especial Daniel BERNOULLI, y que desempeñó un notable papel en la futura revisión de los principios del análisis.

De los demás matemáticos del siglo XVIII sólo mencionamos a Edward WARING, autor de importantes y originales investigaciones en el campo de los números y de las ecuaciones algebraicas, y que dejó su nombre vinculado a las relaciones entre los coeficientes de una ecuación y la suma de las potencias de igual grado de sus raíces; CRAMER, que también se ocupó de álgebra, pero en vista especialmente a su utilización en el estudio de las curvas planas, encontrando en ese estudio la regla conocida por su nombre para la resolución general de sistemas lineales; y Johann Heinrich LAMBERT, sabio múltiple que se ha ocupado de diversas ramas del saber, y en matemática de variadas cuestiones: de perspectiva, de series, de simbolismo lógico siguiendo las

ideas de LEIBNIZ, de la teoría de las paralelas, del número π, demostrando que no es fraccionario, etc.

Todos estos matemáticos nacieron y murieron en el siglo XVIII, que es el siglo de EULER; la generación siguiente es la de LAGRANGE, y es la generación que asiste a la Revolución francesa.

§ 32.—EL SIGLO DE ORO DE LA MATEMÁTICA FRANCESA

La preferencia por los métodos analíticos, característica de la matemática del siglo XVIII, se acentúa en LAGRANGE, creador de la «mecánica racional», que él llama «mecánica analítica» y que concibe como una rama de la matemática.

Joseph Louis LAGRANGE, de origen francés, pero nacido en Italia, residió casi toda su vida, desde los treinta años, en Berlín y en París. Con sus escritos contribuyó a dotar a las ramas analíticas de la matemática de esa generalidad que las caracteriza, a la vez que las aplicaba a los más variados problemas de mecánica, de astronomía, de probabilidades. En sus primeros trabajos, estando aún en Italia, ya sentó las bases del cálculo de las variaciones, independizándolo de los problemas geométricos que le habían dado origen, como el problema de los isoperímetros, y confiriéndole una mayor generalidad.

En todas las ramas de la matemática LAGRANGE descolló: en la teoría de los números, en la teoría de las ecuaciones, donde sus estudios son precursores de la teoría de los grupos, y en análisis infinitesimal.

En 1797, estando LAGRANGE en París, se fundó en esta ciudad la École Polytechnique, de la cual fue profesor durante unos años. Como resultado de sus cursos, LAGRANGE publicó dos tratados, en 1797 y en 1801, en los que los principios del análisis infinitesimal están expuestos de una manera original, aunque no rigurosa,

cuya idea central que lo informa data en verdad de 1772. Con el propósito de evitar los infinitamente pequeños o los incrementos evanescentes, y al mismo tiempo con el afán de independizarlo de toda consideración geométrica o mecánica, funda el análisis de una manera algebraica, tomando como fórmula fundamental la «serie de Taylor». Los coeficientes de este desarrollo serán las «derivadas» (el nombre es de LAGRANGE), y con ellas desarrolla el cálculo diferencial en forma finita. En cuanto al cálculo integral lo considera inverso al cálculo de las derivadas. Aunque tal «método de las derivadas» no es riguroso, fue mérito de LAGRANGE haber asignado a la serie de Taylor la importancia central que tiene en el análisis.

Este intento de LAGRANGE de eliminar los infinitésimos y los límites, que no fue el único de esa época, encontró opositores entre sus contemporáneos, pero sus objeciones pasaron inadvertidas hasta la época de CAUCHY.

En cuanto a la *Mécanique Analytique*, de 1788, digamos simplemente que es una obra que hace época. En ella la mecánica es considerada, más que una ciencia natural, una geometría de cuatro dimensiones (la cuarta dimensión es el tiempo). Partiendo del principio de las velocidades virtuales y utilizando el cálculo de las variaciones, LAGRANGE erige el sistema íntegro de la mecánica, introduciendo el concepto de potencial, el principio de acción mínima, las coordenadas generalizadas, etcétera.

Obra semejante a la cumplida por LAGRANGE en mecánica fue la cumplida por Pierre Simon LAPLACE en astronomía. Su *Mécanique celeste* (cinco volúmenes aparecidos entre 1799 y 1825) comprende todos los descubrimientos realizados por NEWTON, CLAIRAUT, D'ALEMBERT, EULER, LAGRANGE y LAPLACE mismo sobre la mecánica del sistema solar, expuestos en forma totalmente analítica, sin más datos de observación que los indis-

pensables. La conocida hipótesis de la nebulosa ya la había expuesto LAPLACE en un tratado de divulgación, con un apéndice sobre historia de la astronomía, en 1796. En forma semejante LAPLACE dio en 1812 una *Teoría analítica de las probabilidades,* teoría que expuso en 1820 en un *Ensayo filosófico sobre las probabilidades,* sin fórmulas matemáticas.

LAPLACE es un matemático profundo, difícil de leer, entre cuyas numerosas contribuciones originales sólo mencionamos la llamada «ecuación de Laplace o laplaciana» (ecuación diferencial de segundo orden, con derivadas parciales), que se le presentó en el estudio de la función potencial.

De méritos ponderables, aunque inferiores a los de LAGRANGE y LAPLACE, es su contemporáneo Adrien Marie LEGENDRE, último de los grandes analistas del tipo de EULER y de LAGRANGE, que alcanzó a conocer y reconocer los méritos del nuevo grupo de analistas del siglo XIX del tipo de ABEL y de JACOBI.

Sus contribuciones matemáticas más importantes se refieren a la teoría de los números y al cálculo integral. En el primer campo se le debe un tratado de 1830 en que aparece demostrada por primera vez (EULER la había dado sin demostración) la ley llamada de «reciprocidad de los restos cuadráticos», propiedad que GAUSS calificara de «joya de la aritmética».

En el cálculo integral se le debe, en 1811, las llamadas «integrales elípticas», así denominadas porque permiten el cálculo de la longitud de arcos de elipse, imposible de calcular mediante las funciones hasta entonces conocidas. Estas integrales elípticas dieron más tarde, por inversión, nacimiento a las llamadas «funciones elípticas», de manera que en una nueva edición de su obra, aparecida entre 1827 y 1832, LEGENDRE dio cabida en ella a las investigaciones que en ese campo estaban realizando ABEL y JACOBI.

Agreguemos que LEGENDRE, con sus *Éléments de Géométrie,* de 1794, publicó un libro de gran éxito, que tuvo numerosas ediciones y se adoptó como texto en el continente y en los Estados Unidos. Con este libro aparece en la geometría el tratamiento previo de los teoremas al de los problemas (en los *Elementos* ocurre lo contrario) y la geometría adquiere esa fisonomía entre algebraica y geométrica que hoy caracteriza a nuestra geometría elemental. En un *Apéndice,* entre otras novedades, trae la demostración de la irracionalidad de los números π y *e,* agregando esta observación profética: «Es probable que el número π no esté comprendido entre los irracionales algebraicos, es decir, que no sea raíz de una ecuación algebraica de un número finito de términos y de coeficientes racionales.»

Se ocupó, además, de cuestiones de análisis, de geometría elemental también Lorenzo MASCHERONI, al cual pertenece una *Geometría del compás,* de 1797, en la que prueba que todas las construcciones con regla y compás pueden realizarse con compás únicamente. (Recientemente se ha descubierto en este tema un precursor danés del siglo XVII.)

A fines del siglo XVIII el estado del análisis infinitesimal se pone de manifiesto en un gran tratado de Sylvestre François LACROIX, en tres gruesos volúmenes aparecidos entre 1797 y 1800: el primero dedicado al cálculo diferencial y sus aplicaciones geométricas en el que, aunque utiliza el método de LAGRANGE, no excluye el uso de los límites; el segundo dedicado al cálculo integral y cálculo de las variaciones, y el tercero dedicado a las diferencias y a las series. Se debe también a LACROIX una colección de obras didácticas, concernientes a todas las ramas de la matemática, entre las cuales una dedicada al cálculo diferencial e integral, que en 1816 se tradujo al inglés, agregándole en 1820 dos volúmenes de ejercicios.

Esta traducción significó el fin del ostracismo de los analistas ingleses, el abandono de la notación de las fluxiones y la correspondiente adopción de la notación y de los métodos de los matemáticos continentales. Los traductores de LACROIX y promotores del movimiento fueron tres jóvenes estudiantes de Cambridge, que fundaron en 1813 la «Analytical Society» con ese propósito. Eran John F. W. HERSCHEL, hijo del célebre astrónomo, y astrónomo él mismo, aunque se ocupó también de matemática y otras ciencias; Charles BABBAGE, conocido como inventor de máquinas analíticas; y George PEACOCK, probablemente el más matemático del grupo, autor de un importante *Tratado de álgebra,* de 1830 (una segunda edición ampliada a dos volúmenes es de 1842-1845), en el que estudia los fundamentos del álgebra, acentuando el carácter simbólico de la misma, y donde, con el nombre de «principio de permanencia de las leyes equivalentes», enuncia un principio que preludia el llamado «principio de permanencia de las leyes formales» de HANKEL (1867), y que constituye el principio director de todo el análisis algebraico.

§ 33.—EL RENACIMIENTO DE LA GEOMETRÍA

Mientras que en la primera mitad del siglo XVIII «... la geometría no está de moda y para pasar por científico hay que hacer ostentación del análisis», como se expresa melancólicamente un geómetra francés de la época; a fines de siglo la geometría pura vuelve por sus fueros, y aunque se la sigue estudiando con los recursos del análisis, nacen nuevas ramas de la geometría en las que el análisis ya no tiene cabida. Tal es el caso de la «geometría descriptiva», que nace ya con este nombre en 1795, gracias a los esfuerzos de Gaspard MONGE; rama de la geometría en la que se da unidad y jerarquía científica a aquella serie de procedimientos surgi-

dos hacia fines del siglo XV para proporcionar a los pintores y arquitectos normas para la mejor realización de sus obras.

MONGE, que es autor de un método de proyección que lleva su nombre, no se limitó a representar las curvas y superficies por su método, sino que utilizó los recursos del análisis para estudiar nuevas propiedades de las figuras geométricas, invirtiendo en cierto modo el proceso más usual de la época que consistía en tomar esas figuras como pretextos para estudios y ejercicios analíticos.

MONGE fue un gran maestro, de ahí que gran número de discípulos continuó su obra. Mencionemos a Jean Baptiste Marie MEUSNIER y Charles DUPIN, que se ocuparon de curvatura de las superficies; Charles J. BRIANCHON que, solo o en colaboración con PONCELET, se ocupó de propiedades de las cónicas, y Lazare CARNOT, que además de sus actividades civiles y militares se ha ocupado de matemática. Así, en análisis es autor de unas *Reflexiones sobre la metafísica del cálculo infinitesimal*, de 1797, en la que sostiene la tesis, ya conocida desde BERKELEY, de que si los conceptos infinitesimales, no obstante sus imperfecciones, no conducen a resultados erróneos es debido a que los errores que se cometen con ellos se compensan y se anulan. Más feliz fue en sus contribuciones geométricas, con las que puede decirse que se inicia el estudio de las propiedades generales de las figuras, que pronto han de constituir el nuevo cuerpo de doctrina geométrica denominado «geometría proyectiva».

En tal sentido y por su vinculación con la escuela de MONGE debe citarse a Jean Victor PONCELET que, al regresar a Francia después de varios años de cautiverio en Rusia, hizo conocer en 1820 un *Ensayo sobre las propiedades proyectivas de las secciones cónicas*, que dos años después reprodujo ampliándolo como *Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras*.

Entre los resultados de PONCELET aparece el llamado «principio de dualidad», según el cual a cada propiedad geométrica entre ciertos elementos, corresponde otra propiedad geométrica entre otros elementos. Este principio motivó una cuestión de prioridad entre PONCELET y Joseph Diaz GERGONNE. En verdad, PONCELET sólo lo había señalado en un caso particular, mientras que GERGONNE, que lo bautizó, advirtió su alcance general.

Además de su labor como geómetra, mérito indiscutible de GERGONNE fue el de haber fundado y dirigido la primera publicación periódica dedicada exclusivamente a la matemática, que desde 1810 y durante unos tres lustros fue la única revista matemática que se publicaba en el mundo. Cuando en 1832 dejó de aparecer, ya ese intento había dejado sus frutos y desde entonces el número de revistas dedicadas exclusiva o parcialmente a la matemática llegó a superar el millar. En cuanto a las sociedades matemáticas, que empiezan a aparecer en la segunda mitad del siglo XIX, han de llegar actualmente al medio centenar.

§ 34.—LA FÍSICA MATEMÁTICA

Así como en la segunda mitad del siglo XVIII, por obra de MONGE, la geometría adquirió nueva vida, en la misma época y por obra de otro sabio francés, Joseph FOURIER, nace una nueva rama de la ciencia natural, íntimamente vinculada con la matemática: la llamada física matemática, en la que, siguiendo las huellas de LAGRANGE y de LAPLACE, se estudian los problemas físicos mediante los recursos del análisis infinitesimal con el mínimo indispensable de hipótesis físicas.

En este sentido la obra más importante de FOURIER, que también se ocupó con eficacia de álgebra, es una memoria de 1812 sobre la «teoría analítica del calor», con la que entran en el análisis las series trigonométri-

cas, hoy llamadas «series de Fourier», y la importante extensión del concepto euleriano de función al admitirse que mediante tales series pueden representarse funciones arbitrarias.

Entre los científicos nacidos en el siglo XVIII que se ocuparon de física matemática, mencionemos a Jean-Baptiste BIOT, autor además de uno de los primeros textos de geometría analítica (este nombre proviene de LACROIX); Thomas YOUNG y Augustin-Jean FRESNEL que aplicaron, especialmente el segundo, el análisis matemático a la teoría ondulatoria de la luz, logrando imponerla frente a la corpuscular; André-Marie AMPÈRE, célebre por sus investigaciones en el campo del electromagnetismo, aunque se le deben también contribuciones científicas exclusivamente matemáticas; Siméon Denis POISSON, que entre numerosas cuestiones de matemática pura y de física matemática amplió la aplicación de la ecuación de Laplace a la función potencial; George GREEN, que aplicó la función potencial (este nombre es de él) fuera de la gravitación, extendiéndola a problemas de electricidad y de magnetismo, y Gabriel LAMÉ, nacido ya en la última década del siglo y que, además de sus trabajos sobre la teoría del calor y la elasticidad, se le deben contribuciones exclusivamente matemáticas.

cas, hoy llamadas "series de Fourier", y la importante extensión del concepto euleriano de función al admitirse que mediante tales series pueden representarse funciones arbitrarias.

Entre los científicos nacidos en el siglo XVIII que se ocuparon de física matemática mencionemos a Jean-Baptiste Biot, autor además de uno de los primeros textos de geometría analítica (este nombre proviene de Lacroix); Thomas Young y Augustin-Jean Fresnel que se dedicaron, especialmente el segundo, al análisis matemático de la teoría ondulatoria de la luz, logrando imponerla frente a la corpuscular; André-Marie Ampère, célebre por sus investigaciones en el campo del electromagnetismo, aunque se le deben también contribuciones científicas exclusivamente matemáticas; Siméon Denis Poisson, que entre numerosas cuestiones de matemática pura y de física matemática estudió la aplicación de la ecuación de Laplace y la función potencial; George Green, que aplicó la función potencial (este nombre es de él) fuera de la gravitación, extendiéndola a problemas de electricidad y de magnetismo, y Gabriel Lamé, nacido ya en la última década del siglo y que, además de sus trabajos sobre la teoría del calor y la elasticidad se le deben contribuciones exclusivamente matemáticas.

EL SIGLO XIX

§ 35.—GAUSS Y LAS GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS

El período histórico que comprende los tiempos modernos y el siglo de las luces fue sin duda muy fecundo para la matemática. En él se desarrollaron varias ramas de esa ciencia: la geometría analítica, el cálculo infinitesimal, los métodos de la geometría descriptiva y la física matemática, mientras que en él se organizan la teoría de los números, el cálculo de probabilidades y la geometría proyectiva. Mas no puede decirse que alguna de esas ramas se haya constituido definitivamente durante ese período, pues durante él los matemáticos se preocuparon más por los resultados que por los fundamentos, más por los desarrollos que por los principios... Será tarea del siglo XIX analizar esos fundamentos y esos principios, introduciendo en la matemática un rigor aun superior al que gozó esa ciencia en el período clásico de EUCLIDES y de ARQUÍMIDES, rigor que desde entonces constituye una de sus notas características. Al conjuro de ese análisis y de ese rigor no sólo se estructuran definitivamente todas las ramas nacidas y desarrolladas en los siglos XVII y XVIII, sino que nacieron otras nuevas: teoría de los grupos, geometrías no euclidianas, teoría de las funciones, hasta que a mediados de siglo esa labor analítica y rigurosa invade a toda la ciencia matemática y surgen sucesivamente la lógica matemática y la teoría de los conjuntos.

La figura representativa de esta concepción rigurosa de la matemática es Karl Friedrich GAUSS, con el cual se inicia también una pléyade de insignes matemáticos alemanes que llenan todo el siglo XIX.

La labor científica de GAUSS se ha extendido a varios campos: astronomía, física matemática y matemática; y en ésta a casi todas sus ramas, con especialidad a la teoría de los números y a la geometría diferencial.

Muchos de los descubrimientos de GAUSS fueron realizados por él mucho antes de su publicación, y quedaron registrados y fechados en una «libreta de apuntes» encontrada entre sus papeles después de su muerte. El primer descubrimiento que anota en ella, a la edad de dieciocho años, es el magnífico hallazgo de la construcción del heptadecágono con regla y compás, problema que más tarde amplió, dando la fórmula del número de lados de los polígonos regulares que pueden construirse con esos recursos.

Ya en su tesis del doctorado, GAUSS aporta una contribución fundamental a la matemática al exponer la primera demostración del «teorema fundamental del álgebra», vale decir: que todo polinomio algebraico con una letra se anula por lo menos una vez para un valor real o imaginario de la letra. En esa memoria dice, sin demostrarlo, que no es posible resolver algebraicamente la ecuación general de quinto grado, proposición que efectivamente se demostró algo más tarde.

Poco después GAUSS publicó sus *Disquisitiones Arithmeticae,* libro que hace época en la teoría de los números y en el que aparecen notables e importantes contribuciones originales.

De igual importancia y originalidad son sus *Disquisitiones generales circa superficies curvas,* de 1827, con las que funda el estudio de la geometría diferencial de las superficies.

Otras contribuciones analíticas de GAUSS comprenden el estudio estrictamente riguroso de las series y la

introducción de los números complejos en el análisis, el método de los cuadrados mínimos y la ley de distribución de los errores de observación, y como principio metódico, la exclusión en matemática del «infinito actual», y por tanto la admisión exclusiva del «infinito potencial». Para GAUSS, en matemática no es permitido el uso del infinito como «de algo completo», pues en verdad, dice él, «el infinito no es sino una manera de hablar...».

Por último, GAUSS fue uno de los descubridores de la geometría no euclidiana, rama a la que bautizó. Esta geometría nació de las investigaciones realizadas originariamente con el intento de demostrar el postulado V de los *Elementos* a partir de los anteriores. Por ser ese postulado equivalente a la proposición: «Por un punto de un plano pasa una sola paralela a una recta», al postulado y a toda la cuestión se le llama también «de las paralelas». Ya en el siglo XVIII se había realizado el importante progreso, desde el punto de vista del método, de prescindir del postulado V y proseguir construyendo la geometría fundada en los postulados anteriores, pero en vista de los extraños resultados a los que se llegaba, que evidentemente contrariaban al «hábito mental» impuesto por los *Elementos*, se rechazaba la construcción geométrica así obtenida y se justificaba, de esta manera asaz indirecta, el postulado V de EUCLIDES.

GAUSS fue en verdad el primero que vio claro. Preocupado por la cuestión de las paralelas desde su adolescencia, al principio no publica nada sobre el tema por el temor, como él dice, «a la gritería de los beocios», pero en 1831 se decide a hacerlo, aunque el año siguiente, enterado del trabajo de BOLYAI, abandona ese propósito. Con todo, los papeles encontrados entre sus apuntes comprueban que proyectaba escribir una *Geometría no euclidiana*, convencido de que la prescindencia del postulado de las paralelas no conducía a ninguna contradicción, «aunque a primera vista muchos de sus re-

sultados ofrezcan un aspecto paradójico». Es decir, que su mentalidad matemática, superando los obstáculos que ofrecía la intuición geométrica impuesta por el mundo exterior y el hábito mental impuesto por los *Elementos*, le permitió construir, en forma rigurosamente deductiva, un nuevo edificio geométrico.

A la misma conclusión de GAUSS, aunque independientemente de él, llegaron otros dos matemáticos pertenecientes a dos países que hasta entonces no habían contribuido al progreso de la matemática: Johann BOLYAI, de Hungría, y Nicholas Ivanovic LOBACHEWSKI, de Rusia.

BOLYAI publicó en 1832 (como apéndice del primer volumen de una obra didáctica del padre, también matemático) una *Ciencia absoluta del espacio*, en la que expone, como él dice, «un universo creado de la nada». El nombre de «absoluto» que da BOLYAI a sus consideraciones es debido a que ellas se refieren a las propiedades geométricas independientes del postulado, verdades o teoremas que son válidos tanto para la geometría ordinaria como para la geometría más general que él ha construido.

La exposición de LOBACHEWSKI es muy semejante, aunque más constructiva. Su primer trabajo de 1829 se ha perdido; en 1836 aparece en ruso su obra *Nuevos elementos de geometría con una teoría completa sobre las paralelas*, de la cual da un resumen en alemán en 1840, mientras que en 1855, casi ciego, dicta la exposición más completa de su teoría, que aparece en francés y en ruso con el título de *Pangeometría*.

Esta primera etapa del proceso que dio lugar al advenimiento de las geometrías no euclidianas, dio nacimiento a una sola de esas geometrías, la hoy llamada «hiperbólica», en la que por un punto exterior a una recta en un plano hay dos paralelas a la misma. Las nuevas ideas tuvieron al principio una difusión muy lenta; por una parte por ser nuevas y no concordar con

las concepciones filosóficas vigentes, y por otra parte debido también a la escasa difusión, y en especial, en el caso de LOBACHEWSKI, a la difícil lectura de las obras de los dos fundadores matemáticos hasta entonces desconocidos. Felizmente, un grupo selecto de matemáticos de distintos países se esforzaron en hacer conocer estas nuevas ideas, que fueron aceptadas hacia 1870, cuando se habían iniciado en las investigaciones de las geometrías no euclidianas dos nuevas direcciones: las llamadas *métrico-diferencial* y *proyectiva.*

La primera dirección se inicia con uno de los grandes matemáticos del siglo pasado: Bernhard RIEMANN, discípulo y continuador de GAUSS, que completa además el cuadro de las geometrías no euclidianas introduciendo la llamada geometría «elíptica», en la que desde un punto exterior a una recta no existen paralelas a la misma (es claro que la geometría euclidiana, que es entonces la geometría «parabólica», es el caso intermedio y, por tanto, el de la paralela única).

Las ideas fundamentales de RIEMANN, que permitieron encarar el problema de las nuevas geometrías desde un nuevo punto de vista muy superior, figuran en la célebre disertación de 1854, publicada en 1867: *Sobre las hipótesis en las que se funda la geometría,* en la que analiza de la manera más general posible el comportamiento infinitesimal de una multiplicidad de un número cualquiera de dimensiones. En esa disertación aparece la importante distinción entre «infinito» e «ilimitado», que debía desempeñar singular papel en la teoría física de la relatividad.

Además de su contribución a los fundamentos de la geometría, se deben a RIEMANN notables aportes en distintas ramas de la matemática: teoría de la integración, funciones de variable compleja, teoría analítica de los números primos, etc.

§ 36.—La aritmetización del análisis

El análisis infinitesimal (cálculo diferencial, cálculo integral y cálculo de las variaciones) había adquirido un desarrollo extraordinario durante el siglo XVIII, por obra especial de Euler y de Lagrange. Pero ese desarrollo, puramente formal y algorítmico, estaba, por así decir, en el aire, pues no estaba fundado sobre sistema conceptual riguroso alguno. Cuando se aludía a sus fundamentos se hablaba de la «metafísica del cálculo infinitesimal»; en la teoría de las series el uso de las series divergentes estaba rodeado de misterios y de oscuridades...

Tal estado de cosas cambia en el siglo XIX, en el que el análisis infinitesimal, sin dejar de progresar en su desarrollo y hasta en forma más rica y variada, ahonda en sus propios principios y encuentra sus bases firmes en la aritmética, eliminando así de su seno toda vaga e inútil «metafísica». Tal es el proceso denominado de «aritmetización del análisis», del cual fue precursor Bernard Bolzano y fueron constructores Cauchy, Abel, Jacobi...

En su *Analyse algébrique* de 1822, Cauchy dice: «He tratado de dar a los métodos todo el rigor que se exige en geometría, sin acudir jamás a los argumentos tomados de la generalidad del álgebra. Tales argumentos, aunque admitidos comúnmente, sobre todo en el pasaje de las series convergentes a las divergentes y en el de las cantidades reales a las imaginarias, se me ocurren que no deben ser considerados sino como inducciones adecuadas a veces a hacer presentir la exactitud y la verdad, pero que no están de acuerdo con la exactitud tan reputada de las ciencias matemáticas. Además debe observarse que ellas tienden a atribuir a las fórmulas algebraicas una extensión ilimitada, mientras que en la realidad, la mayor parte de esas fórmulas subsisten

únicamente bajo ciertas condiciones y para determinados valores de las cantidades que ellas encierran. Determinando esas condiciones y esos valores, fijando de una manera precisa el sentido de las notaciones que utilizo, toda vaguedad desaparece.» Es decir: vuelta al rigor clásico de la geometría, precisión en las definiciones, delimitación del campo de validez de las fórmulas, eliminación de toda extensión ilegítima; he ahí el programa trazado por CAUCHY y cumplido en sus numerosos libros y memorias, con los que funda el análisis sobre bases más rigurosas que las de sus predecesores; fija claramente la convergencia de las series, y elimina, algo a pesar suyo, las series divergentes del análisis; y sobre todo da un gran impulso a la teoría de las «funciones analíticas» de variable compleja.

En la expulsión de las series divergentes, CAUCHY completó la obra iniciada por Niels Henrik ABEL, para quien «las series divergentes son en general una invención diabólica y es vergonzoso que quiera fundarse sobre ellas demostración alguna...; la parte más esencial de las matemáticas está sin base. Es cierto que la mayor parte de los resultados son exactos, pero esto es una cosa verdaderamente extraña... En el análisis superior sólo pocas proposiciones están demostradas de una manera indiscutiblemente rigurosa. Constantemente se encuentra la deplorable costumbre de deducir lo general de lo particular, y es sin duda muy notable que con tal manera de proceder no se llegue con más frecuencia a lo que se denominan paradojas».

En el campo del análisis, ABEL se ha ocupado de series y de teoría de las funciones; con el problema llamado de la tautócrona inaugura una nueva rama del mismo: la llamada teoría de las ecuaciones integrales; y conjuntamente con Carl Gustav JACOBI, creó y sistematizó el estudio de las «funciones elípticas» obtenidas como funciones inversas de las integrales elípticas. Con las obras de ABEL y de JACOBI sobre las funciones elíp-

ticas se vincula un significativo incidente que muestra la evolución que en esta época sufría el concepto de la matemática frente al de la ciencia natural. Como POISSON, al comentar la obra de JACOBI sobre las funciones elípticas, recordara un reproche que FOURIER había dirigido a ABEL y a JACOBI por no ocuparse de cuestiones de física matemática, JACOBI se expresa en una carta: «POISSON no debía haber reproducido una desgraciada frase de FOURIER, que nos reprocha, a ABEL y a mí, por no ocuparnos del movimiento del calor. Es cierto que FOURIER estima que la finalidad principal de la matemática es la utilidad pública y la explicación de los fenómenos naturales, pero un filósofo como él debiera saber que la única finalidad de la ciencia es el honor del espíritu humano y que, en consecuencia, una cuestión de la teoría de los números tiene un valor tan grande como una cuestión del sistema de los mundos.»

No deja de ser sintomático que mientras de esta manera el análisis mostraba su independencia frente a la ciencia natural, casi contemporáneamente las geometrías no euclidianas proclamaban su liberación del yugo del espacio físico: en verdad, el grito de autonomía de la matemática ya se había lanzado.

El continuador de la obra de ABEL y de JACOBI sobre las funciones elípticas es otro de los grandes analistas del rigor: Karl WEIERSTRASS, creador además de una segunda dirección en el estudio de las funciones analíticas de variable compleja (la primera estaba dada por las investigaciones de CAUCHY y de RIEMANN). Se debe a WEIERSTRASS un ejemplo, que impresionó a los matemáticos de la época, de función continua sin derivada en ninguno de sus puntos. Además, se ocupó de cuestiones vinculadas con los fundamentos de la aritmética, dando en 1863 la demostración del «teorema final de la aritmética», según el cual no existe ningún sistema de números complejos de más de dos unidades (los números complejos ordinarios son de dos unidades) que sa-

tisfaga a todas las propiedades formales de las operaciones aritméticas elementales; y considerando en 1873 una fundamentación de los números reales, problema que no había sufrido modificaciones esenciales desde la teoría (basada en magnitudes geométricas) de EUDOXO.

En este campo fue más feliz Richard DEDEKIND, que, además de ocuparse de la teoría de los números, es autor de dos notables trabajos, de 1872 y de 1888, sobre «la continuidad y los números irracionales» y sobre «la esencia y significado de los números», respectivamente. En el primero de esos trabajos expone el hoy muy usado «método de las cortaduras».

En Francia el analista más importante de esta época es Charles HERMITE, con cuyo nombre está vinculada la resolución del célebre y clásico problema de la cuadratura del círculo. Es a raíz de una investigación de HERMITE, de 1873, que el alemán Ferdinand LINDEMANN, en 1882, dio el toque final a la cuestión, quedando demostrado definitivamente que con regla y compás no podía cuadrarse (encontrar un cuadrado equivalente) un círculo de radio dado.

Terminemos mencionando que en Italia la introducción del nuevo análisis se debe a los esfuerzos de tres jóvenes matemáticos de mediados de siglo: Francesco BRIOSCHI, Enrico BETTI y Felice CASORATI.

La aritmetización del análisis, completado a mediados del siglo XIX, consistió, en definitiva, en agregar a las operaciones aritméticas una nueva operación de índole peculiar: el *paso al límite*, operación que en verdad estaba oculta en los umbrales de la aritmética (teoría de los números) y de la geometría (magnitudes irracionales) en sus dos formas características: mediante el infinito numerable y el infinito continuo, respectivamente.

A través de una correcta definición y de un adecuado uso de esta operación, aquellos métodos infinitesimales, iniciados por NEWTON y por LEIBNIZ y continuados por los BERNOULLI, EULER y LAGRANGE, encontraron una

base firme y segura, de índole aritmética, en la que sustentarse.

Pero esta aritmetización del análisis no sólo aventó las brumas metafísicas que durante todo el siglo XVIII habían oscurecido los fundamentos del análisis, sino que desbrozó el camino que debía conducir a nuevos desarrollos, aplicando el paso al límite a las funciones de variable real o compleja y aclarando el significado de los algoritmos del análisis clásico: series, productos infinitos, fracciones continuas infinitas, derivada, integral.

Se advirtió así que estos algoritmos no eran sino casos particulares de la aplicación del nuevo proceso a ciertas operaciones aritméticas: la serie y la integral son combinaciones de paso al límite con la suma; el producto infinito es una combinación de paso al límite con la multiplicación; la derivada lo es con la división, etcétera, y por tanto que esa nueva operación podía aplicarse a todo proceso algebraico o funcional, dando así nacimiento a nuevos y fecundos algoritmos.

Será tarea del análisis, durante la segunda mitad del siglo XIX, la de profundizar la investigación de los algoritmos clásicos y crear estos nuevos algoritmos.

§ 37.—LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

Con PONCELET se había iniciado el estudio sistemático de las propiedades proyectivas de las figuras, pero ni su definición de proyectividad contemplaba todas las transformaciones gráficas de las figuras, ni sus métodos de demostración poseían ese rigor lógico que entonces se iba imponiendo en la matemática. Constituir y organizar con ese material una rama científica de la matemática, completa y rigurosa, será la obra de un grupo de geómetras del siglo XIX, en su mayor parte alemanes.

Citemos a August Ferdinand MÖBIUS, que, no obstante estudiar la geometría vinculada con la mecánica y con las coordenadas, introdujo una serie de conceptos útiles para la geometría proyectiva; y a dos de los más grandes geómetras de este período: Michel CHASLES y Jacob STEINER. CHASLES publicó en 1837 una obra importante, conocida como su *Aperçu historique*, que contenía investigaciones en las que se pone, como fundamento de la geometría, principios generales concernientes a las transformaciones de las figuras. Pero, en el sentido de la «geometría sintética» (es decir: el estudio de las propiedades geométricas sin el auxilio de las coordenadas), progresos más notables debemos a STEINER, que en 1832 dio a publicidad un tratado sobre el «desarrollo sistemático de la dependencia mutua de las estructuras geométricas», en el que «descubre los órganos mediante los cuales las formas más diferentes del mundo espacial se conectan entre sí».

A STEINER preocupó «el fantasma del imaginarismo», como él decía, esto es, las cuestiones que planteaban la introducción de los elementos imaginarios en geometría, pero tanto él como CHASLES y otros geómetras anteriores, utilizaron esos elementos sin dar de ellos una definición precisa. En este sentido puede considerarse como fundador de la teoría moderna del imaginarismo geométrico a CH. PAULUS, que dio las bases de esa teoría a mediados de siglo.

Eliminadas las coordenadas e introducido en forma precisa el imaginarismo, la geometría proyectiva pudo organizarse como rama autónoma: su organizador es Karl Georg Christian von STAUDT con su *Geometría de posición* de 1847, y en especial con sus trabajos complementarios de la misma de 1856, 1857 y 1860.

Entre los progresos realizados por la geometría proyectiva, inmediatamente después de STAUDT, sólo citamos la demostración de que las propiedades métricas de las figuras (distancias, ángulos, etc.) pueden subordi-

narse a las propiedades gráficas, lograda por Arthur CAYLEY. La consecuencia más notable de esta demostración es que a través de ella pueden reencontrarse las geometrías no euclidianas, que pueden entonces estudiarse siguiendo esta «dirección métrico-proyectiva». De ahí también la frase de CAYLEY: «La geometría proyectiva es toda la geometría.»

§ 38.—LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA

Acabamos de citar la importante obra de CHASLES de 1837, cuyo título alude a un trabajo de índole histórica; en efecto, la primera parte del *Aperçu historique* es una excelente historia de la geometría, desde los griegos hasta PONCELET. Aunque nos inclinamos a considerar la historia de la matemática como rama de la historia de la ciencia más que de la matemática, el caso de CHASLES, matemático que se ha ocupado de la historia de su propia disciplina, nos lleva a una breve digresión para reseñar rápidamente la evolución de esta rama de la historia de la cultura.

Recordemos al peripatético EUDEMO, ya mencionado, y señalemos que desde el Renacimiento muchos matemáticos demostraron un interés histórico, ya editando y anotando obras clásicas, ya reconstruyendo obras perdidas. Pero la primera historia de la matemática que merezca tal nombre es de la segunda mitad del siglo XVIII y es la de Jean-Étienne MONTUCLA, que en 1758 publica una *Historia de las matemáticas* que trata de toda la matemática desde la antigüedad hasta su tiempo.

En la primera mitad del siglo XIX, además de CHASLES, podemos citar a Guglielmo LIBRI, que en 1838-1841 dio una *Historia de las ciencias matemáticas en Italia.* Mientras tanto empezaban a aparecer libros dedicados, en especial, a la matemática griega o del Oriente. Así,

Henry Thomas COLEBROOKE, que residió mucho tiempo en la India, fue de los primeros en hacer conocer la matemática hindú; Georg Heinrich Ferdinand NESSELMAN se ocupó especialmente de matemática griega y fue uno de los primeros en editar obras de matemáticos árabes; August EISENLOHR fue el primer editor del Papiro Rhind, en 1877...

Entre los numerosos historiadores de la matemática de la segunda mitad del siglo XIX, o que llegaron hasta nuestro siglo, destaquemos los más importantes: Hermann HANKEL, ya citado, que además de su obra como matemático se le debe una excelente historia antigua y medieval; Hieronymus Georg ZEUTHEN, discípulo de CHASLES en geometría y autor de penetrantes estudios históricos sobre la matemática griega; Johan Ludvig HEIBERG, historiador de la ciencia antigua y editor de los grandes matemáticos griegos, y Paul TANNERY, autor de tres grandes obras sobre la ciencia griega y de numerosas memorias científicas sobre temas históricos que se han reunido después de su muerte en 11 volúmenes.

Terminemos esta reseña con la nómina de tres historiadores que, además de su labor histórica, tienen en su favor la fundación y dirección de publicaciones periódicas dedicadas a la historia de la matemática. El más antiguo es el príncipe Baldassarre BONCOMPAGNI, especialista en matemática medieval, que organizó una biblioteca rica en manuscritos y fundó y dirigió desde 1868 hasta 1887 un *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*. En cierto sentido, esta labor bibliográfica fue continuada por la *Bibliotheca mathematica* fundada y dirigida hasta la primera guerra mundial por Gustaf ENESTRÖM, publicación periódica que puede considerarse como el complemento del tratado de historia de la matemática más completo publicado hasta hoy: las célebres *Lecciones sobre la historia de la matemática* (cuatro gruesos volúmenes apa-

recidos entre 1880 y 1908) de Moritz CANTOR, que durante su vida también dirigió un par de publicaciones periódicas dedicadas a la historia de la matemática.

§ 39.—EL ÁLGEBRA Y LA TEORÍA DE LOS GRUPOS

Durante el siglo XIX los progresos del álgebra no le fueron en zaga a los del análisis o a los de la geometría. El primer progreso importante relacionado con la teoría de las ecuaciones algebraicas consistió en la demostración de la imposibilidad de resolver la ecuación de quinto grado (y de grado superior) mediante radicales. La primera demostración, en forma restringida, de esa imposibilidad se debe a Paolo RUFFINI, que la hizo conocer en su tratado sobre las ecuaciones de 1798, que amplió y mejoró en escritos posteriores. La primera demostración rigurosa y general se debe a ABEL y es de 1826.

El estudio de la resolubilidad de las ecuaciones algebraicas de grado superior que había sido iniciado por GAUSS para las ecuaciones llamadas «binomias», entra con RUFFINI en una nueva dirección, que dio lugar a uno de los conceptos fundamentales de la matemática contemporánea: el concepto de «grupo» hoy extendido también a la física teórica.

El estudio sistemático de la teoría de los grupos, en su sentido técnico actual, se inicia con Evariste GALOIS, uno de los matemáticos precoces de mayor genio, cuya vida breve y agitada fue digna de la época romántica en la que le tocó actuar.

Muchos matemáticos de la época se ocuparon de esa teoría, apareciendo en 1870 el primer tratado sobre su aplicación a las ecuaciones algebraicas, escrito por Camille JORDAN.

Por su parte, se debe al noruego Matius Sophus LIE la creación de la teoría de los grupos continuos de trans-

formaciones y su aplicación a la integración de las ecuaciones diferenciales, mientras que Félix KLEIN, con su famoso «Programa de Erlangen» de 1872, sistematizó toda la geometría mediante la teoría de los grupos.

En conexión con la teoría de los grupos se desarrolló otro capítulo del álgebra de hoy: la «teoría de las formas» invariantes respecto de cierto grupo de transformaciones. Puede considerarse como el fundador de estos estudios George BOOLE, célebre también por haber iniciado con *The Laws of Thought* de 1854 las investigaciones de lógica simbólica. Entre los cultores del estudio de la teoría de las formas pueden mencionarse CAYLEY y James Joseph SYLVESTER en Inglaterra, HERMITE en Francia, BRIOSCHI en Italia, y KLEIN y Rudolf Friedrich A. CLEBSCH en Alemania.

En otra dirección progresó el álgebra del siglo XIX: en el análisis de los conceptos fundamentales, dando lugar a nuevos sistemas de entes matemáticos, cuyas operaciones no satisfacen totalmente a las leyes ordinarias del álgebra ordinaria.

El sistema más antiguo y más simple es «el álgebra vectorial», nacida del intento de extender al espacio la representación geométrica plana de los números complejos ordinarios. En este «cálculo geométrico», como también se le llama, la labor más importante fue realizada por William Rowan HAMILTON, autor de un sistema de números de cuatro unidades: los «cuaternios», que goza de la importante propiedad de constituir el único sistema que conserva todas las propiedades de las operaciones aritméticas fundamentales con la excepción de la conmutatividad de la multiplicación; y Hermann G. GRASSMANN, originalísimo hombre de ciencia que en su *Teoría de la extensión* de 1844, en forma abstracta y en cierto sentido inusitada, funda las bases de un cálculo geométrico muy general.

Se ocupó de álgebra y de análisis vectorial el norteamericano Josiah Willard GIBBS, conocido también por

sus estudios de quimicafísica, mientras que Benjamín PEIRCE, también norteamericano pero cronológicamente anterior a GIBBS, se ocupó de estudiar y comparar analíticamente las distintas «álgebras», estudios en los que fue seguido por su hijo Charles S. PEIRCE, que se ocupó, además, de lógica matemática.

§ 40.—LA MATEMÁTICA A FINES DEL SIGLO XIX

Con el advenimiento de las geometrías no euclidianas, la aritmetización del análisis, la sistematización de la geometría y el nacimiento de nuevas «álgebras», no se agota la lista de los progresos logrados en la matemática durante el siglo XIX. Para tener una idea más o menos cabal del estado de esta ciencia a principios del siglo XX, resumiremos brevemente otras conquistas realizadas en el siglo XIX, ya en antiguos sectores, ya en nuevos campos.

La teoría de los números tan brillantemente iniciada por GAUSS, encontró un digno continuador en el sucesor de GAUSS en la cátedra de Göttingen: Peter Gustav Lejeune DIRICHLET, a quien se debe la aplicación de los métodos infinitesimales a esa rama de la matemática, estudiando en especial con estos recursos las propiedades de la sucesión de los números primos. Se ocupó de teoría de los números Ernst Eduard KUMMER, también excelente analista y geómetra, que hizo progresar más que ningún otro el estudio de la ecuación de Fermat, introduciendo en esos estudios los llamados «números ideales». Sucesor y discípulo de KUMMER fue otro gran cultor de la teoría de los números: Leopold KRONECKER, que desarrolló la teoría de los llamados «cuerpos de números». Con KRONECKER se inicia una tendencia acerca de los fundamentos de la matemática que en el siglo XX adoptó el nombre de «intuicionista». Según KRONECKER, toda la matemática debía fundarse sobre el concepto de

número natural, único tipo de números de existencia indudable. Pero mientras que para los intuicionistas actuales los números naturales son el resultado de una «intuición básica», para KRONECKER lo eran de un acto de fe. «El buen Dios creó el número natural —decía—, el resto es obra humana.»

Pasando al campo geométrico y dejando de lado numerosos progresos realizados en la geometría elemental, destaquemos que la geometría analítica alcanza en el siglo XIX una generalidad que, sin duda, no sospechó su fundador dos siglos antes.

Se inicia este proceso con Julius PLÜCKER, cuyo primer tratado de geometría analítica es de 1828-1831, y en el que el concepto de coordenada se generaliza y adquiere la categoría de una correspondencia cualquiera entre números y elementos geométricos.

Al principio, la geometría sintética y la geometría analítica se enfrentaron como enemigas; en cierta ocasión STEINER declaró que no escribiría más para el *Journal* de Crelle si PLÜCKER continuaba colaborando en él; pero más tarde, el método de las coordenadas y el método de las proyecciones se combinaron armoniosamente, para dar lugar a una «geometría algebraica» o una «teoría geométrica de las ecuaciones», en la que encontraron cabida la teoría de las formas y los métodos infinitesimales. En estos estudios, en los que contribuyeron todos los geómetras de la segunda mitad del siglo XIX, se destaca una escuela italiana en la que sobresalen entre los iniciadores Corrado SEGRE y Eugenio BERTINI, y entre sus organizadores Federigo ENRIQUES, conocido también por sus estudios epistemológicos y de historia de la ciencia.

Por analogía con el número de ecuaciones y de variables del álgebra, en esta geometría algebraica no hay limitación alguna en el número de dimensiones de una «variedad algebraica» y del espacio o hiperespacio en el que se la estudia. El estudio de las curvas en los es-

pacios pluridimensionales, aunque con dirección preferentemente proyectiva, fue iniciado por William Kingdom CLIFFORD y Giuseppe VERONESE con trabajos de 1878 y 1882, respectivamente.

En cuanto a los progresos del análisis y de la teoría de las funciones en la segunda mitad del siglo XIX, nos limitaremos a algunos nombres e ideas. De los continuadores de la obra de WEIERSTRASS citamos a Hermann Amandus SCHWARZ y Göste Magnus MITTAG-LEFFLER, este último, además, gran promotor de los estudios matemáticos en los países escandinavos, mediante la fundación de un instituto y de un periódico científicos.

De series se ocupó Thomas-Jean STIELTJES, tema del cual se ocupó también el más brillante de los matemáticos de esta época: Henri POINCARÉ, a quien se deben numerosos libros y más de 1.500 memorias sobre los más variados temas de todos los sectores de la matemática, de la física matemática, de la astronomía y de la epistemología.

Mientras tanto, el análisis superior se enriquecía con nuevos algoritmos: las ecuaciones integrales e integrodiferenciales, el cálculo funcional, de los que citamos sólo los nombres de sus iniciadores: Eric Ivan FREDHOLM, Maxime BÖCHER y Vito VOLTERRA.

Terminemos este capítulo, y con él nuestra reseña de la historia de la matemática, con las investigaciones realizadas en la matemática durante el siglo XIX en sus dos campos extremos: los fundamentos y las aplicaciones.

Las cuestiones concernientes a los fundamentos de la matemática que nacieron en el siglo XIX, aunque maduraron en el siglo XX, son: la teoría de los conjuntos, la lógica matemática y la axiomática.

La teoría de los conjuntos es obra de Georg CANTOR, quien llegó a ella a través de cuestiones técnicas. En 1872 ya había dado a conocer una concepción propia del

número irracional; casi diez años después inició sus investigaciones sobre los conjuntos, que culminan con la «teoría de los conjuntos transfinitos» de 1897. En esas investigaciones aparecen conceptos importantes, algunos fundamentales para la matemática. Ciertas paradojas nacidas de esa teoría fueron uno de los puntos de partida de la cuestión acerca de los fundamentos de la matemática que se agitó en el primer tercio del siglo XX.

La lógica matemática, con la que se vincula uno de los bandos en lucha en aquella cuestión, tuvo su origen en un proyecto de LEIBNIZ de someter los entes lógicos a un cálculo semejante al cálculo algebraico. Tal «cálculo lógico», que sólo fue esbozado por LEIBNIZ, no logró una realización satisfactoria hasta Giuseppe PEANO, en especial con su *Formulario mathematico* de 1891, en el que una feliz introducción de la expresión simbólica de las ideas fundamentales permite escribir con símbolos una proposición cualquiera, y someter además esas proposiciones a un cálculo formal sujeto a leyes determinadas.

Al sentarse estas ideas como fundamento de la matemática, el simbolismo lógico como cálculo pasó a segundo plano, mientras que se ponían de relieve las conexiones entre la lógica y la matemática.

En este sentido son importantes las investigaciones de Friedrich Gottlob FREGE, realizadas entre 1879 y 1893, pero difundidas más tarde, con las que se inicia la tendencia logicista que convierte a la matemática en una rama de la lógica.

En otra dirección PEANO y su escuela atacaron a los fundamentos de la matemática: en el análisis y admisión de los postulados fundamentales de la aritmética y de la geometría. En este sentido es importante la fundamentación axiomática de la aritmética, o mejor de la teoría de los números naturales, que hizo conocer PEANO en 1889. Estas investigaciones conducirían poco después al «método axiomático», que, si bien gozaba de

la honrosa tradición euclidea, el siglo XIX lo marcaría con el propio sello riguroso, convirtiéndolo en un método totalmente diferente al utilizado por EUCLIDES.

El propulsor y sistematizador del método axiomático es David HILBERT, sin duda el más grande entre los matemáticos de su época. HILBERT ha impreso su sello y ha dejado su huella en todas las cuestiones vitales de la matemática, desde el análisis de los fundamentos de esta ciencia, a cuya discusión representó la tendencia formalista, hasta sus capítulos más especializados. Es ya famoso el discurso pronunciado por HILBERT en el Congreso de París de 1900 sobre «los problemas de la matemática», en el que señaló la existencia de 23 cuestiones referentes a la matemática que esperaban entonces solución. Gran parte de la matemática del siglo XX ha surgido del estudio de esos problemas, la mayoría de los cuales están actualmente resueltos.

HILBERT expuso sus ideas sobre el método axiomático en sus célebres *Fundamentos de la geometría* de 1899, en los que no sólo enuncia y clasifica los axiomas sobre los que se funda la geometría, sino que aborda la importante cuestión de la contradicción y de la independencia de los axiomas escogidos. Para ello recurre a geometrías artificiales cuyos elementos son números, funciones, etc., con los que HILBERT no hace sino desplazar la dificultad al reducir la cuestión de la compatibilidad de los axiomas de la geometría a la de los axiomas de la aritmética. Y aparece así una de las cuestiones que han preocupado a los matemáticos del siglo XX que intervinieron en la cuestión de los fundamentos de su ciencia y en la que desempeñó un papel primordial el mismo HILBERT.

En cuanto a las aplicaciones de la matemática, recordemos que a mediados del siglo XIX la matemática y la ciencia natural se independizaron mutuamente, aunque esta última aplicó cada vez con mayor extensión e intensidad los métodos matemáticos, circunstancia que no

dejó de tener su efecto sobre la primera. Así encontramos los nombres del astrónomo Friedrich Wilhelm BESSEL y del físico teórico George Gabriel STOKES vinculados con ciertas funciones y fórmulas del análisis matemático.

Por su parte, la matemática proporcionó distintas ramas científicas de aplicaciones prácticas: los métodos de proyección para la representación en el plano de las figuras y de los cuerpos del espacio se sistematizaron desde este punto de vista en los métodos de la actual geometría descriptiva por obra inicial de Wilhelm FIEDLER; mientras nacía, también fundada sobre la geometría proyectiva, la «estática gráfica», cuyos métodos bien pronto superaron a los de la estática analítica y cuya primera sistematización se debe a Karl CULMANN.

También el estudio teórico del cálculo de las probabilidades encontró aplicaciones importantes; así, en la segunda mitad del siglo las probabilidades se aplican a la teoría cinética de los gases, iniciándose así un triunfal ingreso del concepto de probabilidad en el campo de la física, que se ha intensificado en tal medida que en ciertas concepciones contemporáneas ese concepto invade el campo íntegro de los fenómenos naturales. Por su parte, los métodos estadísticos permitieron una aplicación de las probabilidades a los fenómenos sociales, aplicación que se extendió a los fenómenos biológicos, en especial por obra de Francis GALTON y de Karl PEARSON, con el último de los cuales se inaugura una nueva rama científica: la biometría.

Terminemos esta reseña del siglo XIX con la mención de una rama peculiar de la matemática, constituida desde fines de siglo bajo la influencia de las ideas de KLEIN y por obra especial de Carl RUNGE: la matemática de aproximación. Partiendo del supuesto de que en toda aplicación práctica de la matemática el objetivo final es un resultado numérico, y que éste, por esencia, ha de ser aproximado, se ha organizado un cuerpo de doctrina

y un campo propio de investigaciones, en los que se reúnen los métodos numéricos, gráficos y mecánicos que tienden a obtener los resultados numéricos con la aproximación deseada.

Los métodos numéricos incluyen todo lo referente a las aproximaciones numéricas, uso y construcción de tablas, y los variados procedimientos aproximados que se han ideado para la resolución numérica de los problemas de análisis algebraico o infinitesimal. Es claro que tales métodos no son todos del siglo XIX, pero este siglo los ha agrupado y perfeccionado mientras aportaba nuevos métodos y nuevas ideas en el cálculo aproximado. Citemos entre estos últimos el método, quizá el más cómodo en su género, que Carl Heinrich GRÄFFE ideó en 1837 para la resolución numérica aproximada de las ecuaciones algebraicas de grado cualquiera.

Los métodos gráficos se proponen resolver los mismos problemas anteriores o la mayoría de ellos, objetivo que se logra por un doble camino: o bien mediante trazados gráficos en los que para cada problema particular ciertas construcciones geométricas realizadas con los datos permiten obtener gráficamente los resultados; o bien, mediante «tablas gráficas» o «nomogramas», con los que, construido de una vez por todas el nomograma de una determinada fórmula, una simple lectura permite obtener los valores numéricos que la satisfacen. Dentro del primer tipo citemos, por su aplicación práctica, los métodos de integración gráfica; en cuanto al segundo tipo, señalemos que ha dado nacimiento a una rama de la matemática aproximada: la «nomografía», sistematizada especialmente por obra de Maurice D'OCAGNE, cuyos primeros trabajos sobre el tema son de 1891.

Por su parte, los métodos mecánicos incluyen la variada gama de las máquinas de calcular y máquinas analíticas, los numerosos tipos de reglas de cálculo y círculos calculadores, y los importantes y útiles aparatos de integración (planímetros, intégrafos, analizado-

res armónicos, etc.). Citemos, entre las primeras, las interesantes máquinas algebraicas de Leonardo TORRES QUEVEDO (para no citar las ultrarrápidas máquinas contemporáneas), y entre los últimos, el primer intégrafo (aparato que dibuja la curva integral) comercializado, el inventado por Bruno ABDANK-ABAKANOWICZ.

*

Un juicio, por somero que sea, acerca de la matemática del siglo XIX, revela que el esfuerzo realizado por esa ciencia en este siglo ha sido tan extraordinario que ha superado a los esfuerzos que realizara en los veintitrés siglos anteriores. Con él la matemática se ha independizado tanto de las concepciones filosóficas como del mundo exterior y de la ciencia natural; ha logrado una unidad que justifica el nombre —en singular— con que en general hoy se la designa; y ha configurado una soberbia estructura científica, vale decir abstracta, fundada bajo el signo del rigor. El siglo XX verá elevarse esa estructura con un carácter aún más abstracto, si cabe (*).

(*) Lo mismo que al comienzo de esta reseña, volvemos a remitir al lector a la obra allá citada, cuyos dos últimos capítulos, redactados por REY PASTOR, exponen la índole y los caracteres de la matemática actual.

[illegible]

del primer tipo citemos, por su aplicación [illegible] métodos de integración gráficos; en cuanto al segundo tipo, señalemos que ha dado nacimiento a una rama de la matemática aproximada: la nomografía, desarrollada especialmente por obra de Maurice D'OCAGNE, cuyos primeros trabajos sobre el tema son de [illegible]

Por su parte, los métodos mecánicos incluyen la variada gama de las máquinas de calcular y máquinas analíticas, los numerosos tipos de reglas de cálculo y círculos calculadores, los integradores y otros aparatos de integración (planímetros, integrafos, analizado-

ÍNDICE ALFABÉTICO

Los números se refieren a los parágrafos

ÍNDICE DE AUTORES DE LA COLECCIÓN AUSTRAL

HASTA EL NÚMERO 1432

* **Volumen extra**

ABENTOFÁIL, Abuchafar
1195-El filósofo autodidacto.
ABOUT, Edmond
723-El rey de las montañas. *
1408-Casamientos parisienses. *
1418-El hombre de la oreja rota.
ABRANTES, Duquesa de
495-Portugal a principios del siglo XIX.
ABREU GÓMEZ, Ermilo
1003-Las leyendas del Popol Vuh.
ABSHAGEN, Karl H.
1303-El almirante Canaris. *
ADLER, Alfredo
775-Conocimiento del hombre. *
AFANASIEV, Alejandro N.
859-Cuentos populares rusos.
AGUIRRE, Juan Francisco
709-Discurso histórico. *
AIMARD, Gustavo
276-Los tramperos del Arkansas. *
AKSAKOV, S. T.
849-Recuerdos de la vida de estudiante.
ALCALÁ GALIANO, Antonio
1048-Recuerdos de un anciano. *
ALCEO y otros
1332-Poetas líricos griegos.
ALFONSO, Enrique
964-...Y llegó la vida. *
ALIGHIERI, Dante
875-El Convivio. *
1056-La Divina Comedia. *
ALONSO, Dámaso
595-Hijos de la ira.
1290-Oscura noticia. Hombre y Dios.
ALONSO DEL REAL, Carlos
1396-Realidad y leyenda de las amazonas. *
ALSINA FUERTES, F., y PRELAT, C. E.
1037-El mundo de la mecánica.
ALTAMIRANO, Ignacio Manuel
108-El Zarco.
ALTOLAGUIRRE, M.
1219-Antología de la poesía romántica española. *
ÁLVAREZ, G.
1157-Mateo Alemán.
ÁLVAREZ QUINTERO, Serafín y Joaquín
124-Puebla de las Mujeres. El genio alegre.
321-Malvaloca. Doña Clarines.
ALLISON PEERS, E.
671-El misticismo español. *
AMADOR DE LOS RÍOS, José
693-Vida del marqués de Santillana.
AMOR, Guadalupe
1277-Antología poética.
ANACREONTE y otros
1332-Poetas líricos griegos.
ANDREIEV, Leónidas
996-Sachka Yegulev. *
1046-Los espectros.
1159-Las tinieblas y otros cuentos.
1226-El misterio y otros cuentos.
ANÓNIMO
5-Poema del Cid. *
59-Cuentos y leyendas de la vieja Rusia.
156-Lazarillo de Tormes. (Prólogo de Gregorio Marañón.)
337-La historia de los nobles caballeros Oliveros de Castilla y Artús Dalgarbe.
359-Libro del esforzado caballero don Tristán de Leonís. *
374-La historia del rey Canamor y del infante Turián, su hijo. La destruición de Jerusalem.
396-La vida de Estebanillo González. *
416-El conde Partinuples. Roberto el Diablo. Clamades. Clarmonda.
622-Cuentos populares y leyendas de Irlanda.
668-Viaje a través de los mitos irlandeses.
712-Nala y Damayanti. (Episodio del Mahabharata.)
892-Cuentos del Cáucaso.
1197-Poema de Fernán González.
1264-Hitopadeza o Provechosa enseñanza.
1294-El cantar de Roldán.
1341-Cuentos populares lituanos. *
ANÓNIMO, y KELLER, Gottfried
1372-Leyendas y cuentos del folklore suizo. Siete leyendas.
ANZOÁTEGUI, Ignacio B.
1124-Antología poética.
ARAGO, Domingo F.
426-Grandes astrónomos anteriores a Newton.
543-Grandes astrónomos. (De Newton a Laplace.)
556-Historia de mi juventud. (Viaje por España. 1806-1809.)
ARCIPRESTE DE HITA
98-Libro de buen amor.
ARÈNE, Paul
205-La cabra de oro.
ARISTÓTELES
239-La política. *
296-Moral. (La gran moral. Moral a Eudemo.) *
318-Moral a Nicómaco. *
399-Metafísica. *
803-El arte poética.
ARNICHES, Carlos
1193-El santo de la Isidra. Es mi hombre.
1223-El amigo Melquiades. La señorita de Trevélez.
ARNOLD, Matthew
989-Poesía y poetas ingleses.
ARNOULD, Luis
1237-Almas prisioneras. *
ARQUÍLOCO y otros
1332-Poetas líricos griegos.
ARRIETA, Rafael Alberto
291-Antología poética.
406-Centuria porteña.
ASSOLLANT, Alfredo
386-Aventuras del capitán Corcorán. *
AUNÓS, Eduardo
275-Estampas de ciudades. *
AUSTEN, Jane
823-Persuasión. *
1039-La abadía de Northanger. *
1066-Orgullo y prejuicio. *
AVELLANEDA, Alonso F. de
603-El Quijote. *
AVERCHENKO, Arcadio
1349-Memorias de un simple. Los niños.
AZARA, Félix de
1402-Viajes por la América meridional. *
AZORÍN
36-Lecturas españolas.
47-Trasuntos de España.
67-Españoles en París.
153-Don Juan.
164-El paisaje de España visto por los españoles.
226-Visión de España.
248-Tomás Rueda.
261-El escritor.
380-Capricho.

ÍNDICE DE AUTORES

EXPLICACIÓN DE LOS COLORES DE LA "COLECCIÓN AUSTRAL"

Serie AZUL:
Novelas y cuentos en general.

Serie VERDE:
Ensayos y Filosofía.

Serie ANARANJADA:
Biografías y vidas novelescas.

Serie NEGRA:
Viajes y reportajes.

Serie AMARILLA:
Libros políticos y documentos de la época.

Serie VIOLETA:
Teatro y poesía.

Serie GRIS:
Clásicos.

Serie ROJA:
Novelas policiacas, de aventuras y femeninas.

Serie MARRÓN:
Ciencia y técnica. Clásicos de la ciencia.

ÚLTIMOS VOLÚMENES EN VENTA

1388.—PLAUTO: **Anfitrión - La comedia de la olla.**
1403.—TITO LUCRECIO CARO: **De la naturaleza de las cosas.** *
1406.—WILLIAM SHAKESPEARE: **La primera parte del rey Enrique IV - La segunda parte del rey Enrique IV.**
1413.—ERCKMANN-CHATRIAN: **El amigo Fritz.**
1417.—W. A. HEURTLEY, H. C. DARBY, C. W. CRAWLEY y C. M. WOODHOUSE: **Breve historia de Grecia.** *
1428.—FEDOR SOLOGUB: **El trasgo.** *
1432.—THOMAS HARDY: **Lejos del mundanal ruido.** *
1436.—JOSÉ LARRAZ: **¡Don Quijancho, maestro!** *
1437.—CARLOS NODIER: **El Hada de las Migajas.** *
1441.—RAMÓN GÓMEZ DE LA SERNA: **El torero Caracho.**
1443.—ALFREDO DE VIGNY: **Dafnis - Chatterton.** *
1444.—AUGUSTE BAILLY: **Mazarino.** *
1445.—JUAN JACOBO ROUSSEAU: **Contrato social.**
1460.—JUAN RAMÓN JIMÉNEZ: **Segunda antolojía poética (1898-1918).** *
1470.—PEDRO LAÍN ENTRALGO: **Gregorio Marañón: Vida, obra y persona.** *
1480.—JOSÉ CAMÓN AZNAR: **El pastor Quijótiz.**
1481.—RAMÓN DE GARCIASOL: **Claves de España: Cervantes y el "Quijote".** *
1494.—JOSÉ CAMÓN AZNAR: **Hitler - Ariadna - Lutero.**

* **Volumen extra.**

Véase la lista completa en las últimas páginas del texto

*

ESPASA-CALPE, S. A.

COLECCIÓN AUSTRAL